Spektroskopie dvojhvězd

Petr Hadrava

červen 2001

Obsah

Předmluva **iii**

I Výklad k vybraným pracím v

1 Některé otázky přístrojového vybavení **vii**

2 Teoretické problémy atmosfér dvojhvězd **ix**
2.1 Přenos záření v rozsáhlých atmosférách ix
2.2 Dynamika okolohvězdné hmoty xi

3 FOTEL **xiii**
3.1 Řešení křivek radiálních rychlostí xiii
3.2 Řešení světelných křivek xv

4 KOREL **xix**
4.1 Metoda cross-korelace xix
4.2 Metody rozkladu spektra xx
4.3 Metody rozmotávání spektra xxi
4.4 Metoda relativní čarové fotometrie xxv
4.5 Rozmotávání spekter s proměnnými profily xxvii
4.6 Rozmotávání spekter a dopplerovské zobrazování xxix

Literatura **xxxiii**

Seznam publikací a citací **xxxv**

II Texty vybraných prací 1

Simple Kinetic Model of a Multi-particle Cloud **3**

Simple Kinetic Model of a Multi-particle Cloud II. Gaseous Streams in Algols **11**

The Roche Coordinates in Non-Synchronous Binaries **19**

Model Atmospheres of Binary Components **28**

Eclipsing Binaries – Light-curve solution **32**

Radiative transfer in rotating stars **35**

Reflection with limb darkening **41**

Orbital elements of multiple spectroscopic stars **42**

Relative line photometry of eclipsing binaries **46**

The method of spectra disentangling and its links to Doppler tomography **50**

Algoritmy k řízení 2m-dalekohledu **58**

... iuvat ire per alta astra ...
Ov. met. 15,147-148[1]

Předmluva

Předkládaná disertace shrnuje základní výsledky mé práce v oboru stelární astrofyziky za tři desetiletí. Je to jeden ze tří hlavních oborů, kterým se v současnosti věnuji. Další dva jsou relativistická astrofyzika a historie astronomie. Z relativistické astrofyziky, která mne doposud nejvíce spojovala s univerzitou, především se školou prof. J. Bičáka, v současnosti připravuji habilitační práci. Proto práce z tohoto oboru do disertace nezařazuji. Podstatou věci je ovšem dáno, že přechod mezi stelární a relativistickou astrofyzikou je spojitý a současné působení v obou těchto oborech mne vedlo k vyhledávání témat a uplatňování metod především z jejich pomezí. Proto i rozdělení některých výsledků mezi tyto obory je do značné míry věcí volby. Řídím se v něm tedy především okolnostmi vzniku té které práce a do této disertace zařazuji především práce spojené s pozorovacím programem ondřejovského dvoumetrového dalekohledu. Domnívám se však, že pro vysvětlení širších souvislostí je nezbytné zmínit se i o vzájemných vztazích prací z obou těchto oborů. Ostatně, v obecnější rovině se i historie astronomie prolíná s moderní astrofyzikou; v některých případech se ukázalo výhodné uplatnit v práci s historickými materiály matematické postupy inspirované exaktními astrofyzikálními metodami, historie vědy naopak poskytuje pro moderní astrofyziku zkušenost ukazující cennost pohledů na studované problémy z různých zorných úhlů. Proto jsem se vždy snažil o poměrně široký záběr, přestože byl spíše na úkor výsledků posuzovaných podle kvantitativních scientometrických kritérií.

Mé práce z oboru stelární astrofyziky jsou svou povahou dosti různorodé – od přístrojových přes pozorovatelské, metodologické, až k teoretickým. Jejich zaměření a cíl vyjádřený i v názvu této disertace je však určen tradicí české stelární školy (soustřeďující se na studium proměnných hvězd a dvojhvězd) a programem a možnostmi národního dvoumetrového dalekohledu v Ondřejově, u kterého pracuji od našich časově prakticky koincidujících počátků.

Ze začátku, jako student, jsem se věnoval hlavně proměřování spekter pořízených 2m-dalekohledem. Později jsem se začal podílet i na samotných pozorováních v rámci programu stelárního oddělení,[2] a to jak na spektroskopických pozorováních na 2m (i na kavkazském 6m), tak i na fotometrických pozorováních na Hvaru. Samotnému pozorování jsem dosud věnoval nezanedbatelnou část své práce a napozorovaný materiál má stále svoji archivní hodnotu doposud zhodnocenou jen zčásti. Protože šlo o kolektivní projekt a moje úloha v něm měla být hlavně v oblasti teorie, postupně jsem se méně podílel na přímém zpracování a zejména finalizaci výsledků. Můj podíl na některých (zejména starších) kolektivních 'pozorovatelských' publikacích, jejichž jsem spoluautorem, je těžko vymezitelný[3] a jejich citační ohlas často více závisí na zajímavosti a dalším chování studovaných hvězd, než na množství a originalitě vlastní práce. Proto tyto práce do předkládané disertace rovněž nezahrnuji.

[1] *... mne těší ve výši kráčet po hvězdách ...* (přel. Ferd. Stiebitz)

[2] Tento program tzv. 'Zarfin'-klubu se zabýval hvězdami s obálkami, tj. Be-hvězdami a interagujícími dvojhvězdami, především sledováním jejich dlouhodobé proměnnosti.

[3] Často spočíval především v pořízení a předzpracování dat, někdy v jednoduchých teoretických úvahách a výpočtech (viz např. práce [15], [20], [23], [24], [25], [27], [40], [41] aj. ze seznamu na str. xxxv).

Pro mou vlastní samostatnou práci byla účast na pozorováních a jejich zpracování důležitá tím, že mi umožňovala lépe chápat otázky, které pozorování staví před teorii, i možnosti, které pozorování naopak nabízí k ověřování teoretických závěrů. Proto jsem se v teoretických pracích (stelárních i relativistických) orientoval převážně na výpočty pozorovatelných efektů. Přímá interakce s pozorováním rovněž ovlivnila můj software (především FOTEL) na vyhodnocení napozorovaného materiálu směrem k usnadnění práce s velkým počtem i heterogenních dat.

Zejména pozdější pozorovatelské práce jsou často ukázkou aplikace metod a softwaru (FOTEL, KOREL), které jsem vyvinul k interpretaci fotometrických i spektroskopických pozorování. Tento software byl použit i v řadě prací, jejichž spoluautorem nejsem, a to i různými zahraničními skupinami (což je jen zčásti dokumentováno např. citacemi k práci [E1]). Proto jej považuji za podstatnou část této disertace, přestože nejde o publikaci, a tedy do ní nemůže být přímo zařazen.

První z uvedených programů (FOTEL) je jen jedním z mnoha podobných programů napsaných dříve i později na různých místech celého světa k řešení světelných křivek.[4] Od dalších podobných programů se odlišuje některými nestandardními možnostmi, například možností výpočtu různých sekulárních členů z velkého objemu zdrojových dat, naproti tomu zjednodušuje některé problémy, které jsou v programech jiných autorů řešeny přesněji. K řešení atypických úloh by se tedy měl volit z celkové nabídky programů ten nejvhodnější, standardní problémy naopak umožňují vzájemné porovnání programů a jejich kontrolu.

Na rozdíl od FOTELu je KOREL dosud prakticky ojedinělý program,[5] umožňující zpracování dat originální metodou tzv. fourierovského rozmotávání spekter. Ta měla jistou obdobu pouze v metodě rozmotávání spekter Simona a Sturma, která byla publikována jen s nepatrným předstihem a dnes je již prakticky opuštěná. O program KOREL projevila zájem řada zahraničních pracovišť.[6] Jako první pracoviště mimo Ondřejov tento program použili kolegové ze Skalnatého Plesa, dále z Bambergu, v poslední době zejména skupina z Bruselu a Zagrebu. Vznik této metody je výsledkem zkušeností získaných při předchozí teoretické, pozorovatelské i programátorské práci v oboru spektroskopie dvojhvězd a představuje tak jisté vyvrcholení ostatních prací. Proto je v předkládané disertaci tomuto tématu věnována největší část výkladu.

Závěrem bych rád vyjádřil svůj vděk osudu, který mi umožnil prožít pocity vyjádřené v mottu k této práci. Tím osudem byla šťastná souhra okolností, příznivá konstelace hvězdáren otvírajících cestu ke hvězdám, především však lidé, kteří mne na této cestě provázeli. V prvé řadě to byli moji rodiče, dále pak pedagogové škol, které jsem absolvoval, a kolegové na pracovišti, v neposlední řadě pak moje rodina, u které nacházím oporu a povzbuzení.

[4] Ve své přehledové monografii Kallrath a Milone (1999) zařazují FOTEL mezi 6 programů, které nazývají fyzikální, kromě toho však uvádějí srovnatelný počet dalších modelů a programů.

[5] Vlastní program k užití naší metody rozmotávání spekter vytvořil v systému MAPLE ještě před svým pobytem v Ondřejově David Holmgren. Jinou napodobeninu KORELu v současnosti připravuje Saša Ilijić.

[6] Seznam pracovišť, která zažádala o povolení přístupu na webovskou stránku http://sunkl.asu.cas.cz/˜had/korel.html se zdrojovým kódem, lze nalézt na jedné z jejích podstránek (...˜had/korel/users).

Část I

Výklad k vybraným pracím

Kapitola 1

Některé otázky přístrojového vybavení

Mým prvním pozorovatelským úkolem spojeným se spektroskopií dvojhvězd bylo měření radiálních rychlostí na fotografických spektrogramech (viz např. práce [1]) a především určení a minimalizace chyb metodiky zpracování (viz např. práce [2][1]). Standardní postup aproximace disperzní křivky polynomem zvoleného stupně skrývá nebezpečí nedostatečné či přílišné přizpůsobivosti křivky naměřeným vztažným bodům. Alternativní fitování přesnou disperzní formulí ve tvaru obecné sinusovky ($\lambda = a+b\sin(c+dx)$) bylo při tehdy dostupné výpočetní technice[2] poměrně obtížné. Linearizace tohoto vztahu ($\lambda = a+B\sin(xd)+C\cos(xd)$) v části hledaných parametrů však značně zjednodušila užití metody nejmenších čtverců, protože hodnoty lineárních parametrů a, B a C lze nalézt přímým výpočtem (viz str. xiv) a v jediném nelineárním parametru d lze již snáze optimalizovat např. metodou dělení intervalu. Analogie tohoto triku se osvědčila i v řadě pozdějších úloh, a jak uvidíme v kapitole 4, tvoří vlastně i jádro úspěchu fourierovského disentanglingu ve srovnání s alternativními metodami.

Při první modernizaci 2m-dalekohledu v letech 1981 až 1987 vznesl dodavatel[3] požadavek, aby Astronomický ústav vypracoval metodiku určení parametrů korekcí pro počítačové navádění dalekohledu na hvězdu podle souřadnic. Z matematického hlediska se jednalo o podobný problém jako při výše uvedeném prokládání disperzní formule, nebo v té době již rozpracovávaném programu na řešení světelných křivek a křivek radiálních rychlostí, totiž proložit naměřenými souřadnicemi dalekohledu zaměřeného na hvězdy v různých polohách na obloze příslušné vztahy vyjadřující například vliv mechanických průhybů dalekohledu a minimalizovat odchylku naměřených souřadnic dalekohledu od skutečných souřadnic hvězdy. K tomuto účelu jsem napsal a odzkoušel program KOR2M, který byl použit na změřené polohy. Výsledky a program se stručným vysvětlením byly předány dodavateli. Tím se problém zdál být uzavřen a nebyl důvod jeho řešení podrobněji sepisovat, natož publikovat. Při druhé modernizaci v letech 1997 až 1998 se však situace opakovala s ještě větší naléhavostí, neboť došlo ke změně dodavatele na elektronickou firmu Science Systems, která neměla představu ani o formulaci, natož řešení tohoto úkolu. Proto vznikla práce [**E7**] vycházející z předchozích zkušeností (a fragmentů poznámek k programu KOR2M) a doplňující i formulaci dalších

[1] Číslem v hranaté závorce označuji své vlastní práce ze seznamu na straně xxxv (resp. xliv), tučně pak ty z nich, které jsou zařazeny do této disertace a jejichž plné texty jsou uvedeny od strany 3. Ostatní práce, které jsou citovány jmény autorů a rokem vydání, jsou uvedeny v seznamu na str. xxxiii.

[2] Tj. na počítači typu Minsk v jazyce MAT.

[3] Tj. výrobce dalekohledu, firma Karl Zeiss Jena, a subdodavatel elektroniky a řídícího softwaru, firma Vilati.

výchozích vztahů pro řídící software dalekohledu. V současnosti se tato problematika opět jeví uzavřená a přitom natolik speciální, že není ani důvod ani vhodné místo publikovat ji tiskem. Práci [**E7**] však zařazuji do této disertace především z praktických důvodů pro případ, že by se podobná situace v budoucnosti opakovala a opět vznikla potřeba korekce dalekohledu přeměřit a přepočítat, nebo znovu přeprogramovat řídící software.

Kapitola 2

Teoretické problémy atmosfér dvojhvězd

2.1 Přenos záření v rozsáhlých atmosférách

První teoretické téma, které mi dr. S. Kříž zadal počátkem 70tých let na diplomovou práci, bylo modelování hvězdných atmosfér ("Modely atmosfér hvězd raných spektrálních typů", MFF UK Praha, 1974). S ohledem na pozorovací program oddělení jsem se snažil hlavně o zobecnění planparalelních modelů na rozsáhlé hvězdné atmosféry a zaměřil jsem se přednostně na formulování rovnice přenosu záření ve sférické a rocheovské geometrii a její řešení metodou zobecněné Lambda-iterace. Z matematického hlediska jde o studium pohybových rovnic (především pro pole záření) v křivočarých souřadnicích, podobně jako v obecné teorii relativity. Proto bylo přirozené problém rozšířit na obecně relativistickou formulaci rovnice přenosu záření (v přiblížení Boltzmannovy rovnice pro fotony v obecně-relativistické kinetické teorii). Protože z fyzikálního hlediska je ohyb paprsků v gravitačním poli analogický vlivu disperzního prostředí, zobecnili jsme s prof. J. Bičákem úlohu i na tento případ a jako jedni z prvních jsme studovali šíření a intenzitu vln v disperzním prostředí na pozadí zakřiveného prostoročasu (viz práce [3] a [4], z nichž první se stala východiskem řady významných prací jiných autorů). Problematika pohybu a fokusace záření v gravitačním poli je charakteristická i pro mé pozdější relativistické práce (např. [38], [39], [42] aj.).

Pro potřeby studia atmosfér dvojhvězd jsem se zabýval přenosem záření v několika pozdějších pracích. Práce [7] byla motivována snahou formulovat 3-dim. přenos záření ve slapově deformovaných atmosférách dvojhvězd užitím tzv. rocheovských souřadnic, které podle definice Kopala (1970) měly být 3-ortogonální. V práci [**17**] jsem však ukázal, že takové souřadnice v obecném případě slapově deformované složky dvojhvězdy neexistují, protože není splněna Cayleyho-Darbouxova podmínka integrability příslušných diferenciálních rovnic. Proto jsem předefinoval rocheovské souřadnice jako asymptoticky sférické, ortogonální k ekvipotenciálním plochám, nikoliv však vzájemně ortogonální.[1] Přítomnost nediagonálního členu v metrice způsobuje přídavné členy v příslušné Boltzmannově rovnici a omezuje platnost práce [7], kterou proto jakožto překonanou do disertace nezařazuji, ačkoliv byla východiskem pro zjištění a vyřešení uvedené komplikace v následujících pracích.

Přenos záření ve speciálním případě rotující hvězdy, kdy je 3-ortogonalita splněna, je stu-

[1] Tuto skutečnost prof. Z. Kopal reflektoval i ve své pozdější monografii (Kopal 1989), ovšem (na rozdíl od Kallratha a Milona 1999) opět nesprávně tvrzením, že nesplnění uvedené podmínky je překážkou pouze nalezení analytického a nikoliv numerického řešení.

dován v práci [**34**]. Je zde kvantitativně ukázáno, že příčná difuse záření (tj. ve směru ekvipotenciály efektivního potenciálu) může do značné míry redukovat von Zeipelovo (1924a,b,c) gravitační ztemnění odvozené pouze z aproximace radiální difuse.

Drobným příspěvkem opravujícím chybu tradovanou v literatuře ve výpočtu odrazového jevu ve dvojhvězdách (Formiggini a Leibowitz 1990) je rovněž práce [**35**].

V práci [**19**] je rovnice přenosu záření formulována v neortogonálních rocheovských souřadnicích.[2] V této práci a v práci [21][3] je rovněž ukázáno, že předpoklady zářivé a hydrostatické rovnováhy jsou v nesymetrických atmosférách vzájemně neslučitelné. Za předpokladu hydrostatické rovnováhy

$$\nabla P + \rho \nabla \Phi = 0 \tag{2.1}$$

totiž musí isobary koincidovat s ekvipotenciálami ($P = P(\Phi)$) a ekvidensity rovněž ($\rho = -\frac{dP}{d\Phi} = \rho(\Phi)$). Podle stavové rovnice by tedy i teplota a ostatní veličiny měly být homogenní po ekvipotenciále. Proto také v difusní aproximaci zářivý tok, který je úměrný gradientu teploty, má být přímo úměrný tíhovému zrychlení, $H \sim \nabla T \sim g \equiv \nabla\Phi$. V opticky tenkých vrstvách atmosféry se ovšem při daném toku H (a tedy efektivní teplotě $T_{eff} \sim g^{1/4}$) relativní pokles teploty T zmenšuje oproti hodnotě pro velké optické hloubky τ. Například pro šedou atmosféru je teplota $T(\tau)$ dána vztahem

$$T^4 \sim S = 3H(\tau + q(\tau)) \ , \tag{2.2}$$

kde S je vydatnost a q je Hopfova funkce ($q(0) \simeq 0.58$, $q(\infty) \simeq 0.71$). Teplota na povrchu se tedy blíží konstantě úměrné T_{eff} a v rozporu s výchozím předpokladem je různá v různých částech vysokých ekvipotenciál. To by mělo vést k narušení hydrostatické rovnováhy a vzniku meridionální cirkulace v atmosféře. To je další důvod, proč obecně nemusí platit ani von Zeipelův vztah pro gravitační ztemnění. Za předpokladu striktní homogenity teploty po ekvipotenciále, $T = T(\Phi)$, musí horní vrstvy atmosféry v místech s vyšším g absorbovat část zářivého toku H přicházejícího z hlubších vrstev a naopak ji doplňovat k zářivému toku v místech s nižším g. Integrací rovnice přenosu záření podél paprsku se lze přesvědčit, že specifická intenzita v tangenciálním směru by měla být po celém disku hvězdy stejná a s tíhovým zrychlením g by se měla nejvíce měnit specifická intenzita v radiálním směru. To znamená, že spíše než zářivý tok by s gravitačním zrychlením mělo být korelované okrajové ztemnění. Výsledky numerické integrace ukazují, že pro šedou atmosféru

$$T_{eff} \sim g^{0.14} \ , \tag{2.3}$$

tedy že gravitační ztemnění je menší než by odpovídalo von Zeipelovu teorému.[4] V různých barvách pro skutečnou atmosféru se ovšem tento vztah může lišit.

Snaha porovnat výsledky výpočtů takovýchto alternativních modelů atmosfér asymetrických hvězd s pozorovanými světelnými křivkami ukázala potřebu odladit odpovídající program na řešení světelných křivek. Tak začal vznikat program FOTEL, kterému je věnována následující kapitola. Tento program se však záhy osvědčil především jako účinný nástroj k řešení křivek radiálních rychlostí, a praktické potřeby jeho uživatelů převážily nad původním cílem, a proto jeho další vývoj vedl více k přibližnému započítání řady přídavných efektů, než k původně zamýšlenému zahrnutí přesných modelů asymetrických atmosfér.

S otázkou hydrostatické rovnováhy ve složkách dvojhvězd však souvisí ještě práce [14], ve které je studován vliv slapových sil na vnitřní stavbu hvězd v excentrických drahách a s tím

[2] Směrové kosiny paprsků jsou přitom vyjádřeny v ortonormální bázi, která je k souřadnicovým čarám vázána podmínkou nejmenších čtverců.

[3] Tato práce je ve skutečnosti podle data svého vzniku starší než práce [**19**], ve které jsou její výsledky prakticky zahrnuty, a proto ji do disertace nezařazuji.

[4] Tyto výpočty byly prováděny v letech 1982–86 ve spolupráci s diplomantem panem J. Moravcem.

související změnu jejich objemu (který bývá v modelech takových soustav postulován jako konstantní).

2.2 Dynamika okolohvězdné hmoty

Dalším krokem směrem k teoretickému modelování pozorovatelného záření interagujících dvojhvězd byla má kandidátská disertační práce ("Kinetická teorie rozsáhlých hvězdných atmosfér", AsÚ ČSAV Ondřejov, 1980), napsaná opět pod vedením dr. S. Kříže (viz práci [6]). Pokus o sestavení programu (až ve třech dimenzích, navíc s možností zahrnout i vyšší momenty Boltzmannovy rovnice) k hydrodynamickému modelování časového vývoje okolohvězdné hmoty ve dvojhvězdě s přetokem Lagrangeovým bodem L_1 byl při tehdejších výpočetních možnostech příliš nadsazený. Výsledky však přinesly alespoň pomocné metody určené ke konstrukci přibližných odhadů stacionárních řešení plynných proudů a akrečních disků. V práci [**8**] byly formulovány základy teorie, která umožňuje počítat přibližný model vývoje tvaru a struktury plynného oblaku vlivem slapových sil při jeho pohybu ve vnějším gravitačním poli.[5] Úloha přitom vede k soustavě obyčejných diferenciálních rovnic, takže jejich integrace není o mnoho náročnější než řešení pouhých pohybových rovnic. V idealizovaných případech lze nalézt i analytická řešení, která umožňují například pochopit některé jevy fokusace částic plynu slapovými silami. V práci [**11**] byla tato metoda zobecněna pro případ stacionárního jednorozměrného proudu, což dává jistou variantu tzv. $1+\frac{1}{2}$-dimenzionální hydrodynamiky jako práce Lubowa a Shu (1975), avšak s možnostmi fyzikálně přesnějšího modelování termodynamického režimu expandujícího proudu. Tuto metodu jsme užili např. v práci [16], kde jsme ukázali, že plynný proud nemusí mít vždy tloušťku větší než akreční disk a obtékat jej (jak navrhli Lubow a Shu), ale může být naopak užší, pronikat do disku v rovině jeho symetrie a být obtékán povrchovými vrstvami disku. Tento model se ukázal jako vhodné vysvětlení pozorovaných jevů (především asymetrické polohy zdroje jetů) např. v práci [74].

Na metodiku práce [**8**] navazují i naše pozdější práce [13], [18] a [28] s dr. J. Kadrnoškou, věnované výpočtům periodických drah v restringovaném problému tří těles a stability těchto drah. Motivací těchto prací je myšlenka (Paczyński 1977), že právě k jednoduše periodickým drahám by měly disipovat proudnice chladného akrečního disku kolem složky dvojhvězdy. Stabilita těchto drah by proto mohla dát omezení vnějšího poloměru akrečního disku ve dvojhvězdách. Kromě toho geometrie a dynamika těchto drah může vysvětlit některé jevy ve spektrech interagujících dvojhvězd (Suzuki 1980) a naším příspěvkem bylo odvození aproximace (Poincarého metodou analytického pokračování rozvojem podle poměru hmot) nahrazující numerické metody hledání periodických drah. V současnosti pracujeme s doktorandem panem R. Řezáčem na relativistickém zobecnění metody popsané v práci [**8**] – cf. práci [71].

[5] Při sazbě tohoto článku vznikla řada tiskových chyb, z nichž některé unikly korektuře. Věcně významné jsou tyto opravy: Rov. (9) na str. 235 má být $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \xi_I}\right]_0 = -\left[\frac{\partial \dot{\xi}_K}{\partial \xi_I}\right]_0 \left[\frac{\partial F}{\partial \xi_K}\right]_0$; exponent v rov. (25) má být $-c_i t$ (s vlastní hdnotou, tj. malým c); člen (3,3) na pravé straně rov. (31) má být $\cos\psi t$, protože submatice pro souřadnice z, p_z odpovídá prostým harmonickým kmitům, a konečně rov. (58) na str. 240 má být $\omega = [\{5S + 8 \pm (25S^2 + 8S + 4)^{1/2}\}/3]^{1/2}$.

Kapitola 3

FOTEL

V této kapitole jsou vysvětleny některé podrobnosti programu FOTEL na řešení světelných křivek a křivek radiálních rychlostí, zvláště ty, které mohou usnadnit pochopení principu KORELu v následující kapitole. Stručný popis FOTELu byl publikován v práci [**29**], nověji je shrnut i v monografii Kallratha a Milona (1999). Nejúplnější popis programu je obsažen v uživatelském manuálu [E1]. Stručný přehled metod řešení světelných křivek je uveden v práci [67] (spolu se souvislostí této úlohy s proměnností profilů spektrálních čar).

Hlavním úkolem programu FOTEL je řešení světelných křivek a jeho původním cílem bylo ověřování jemných rozdílů v pozorovaných světelných křivkách zákrytových i nezákrytových těsných dvojhvězd, které by podle teoretických modelů uvedených v předchozí kapitole měly vznikat v důsledku interakce složek, především jejich vzájemným slapovým působením. Proto byl program od počátku koncipován tak, aby umožňoval konvergenci velkého počtu volných parametrů, které mohou být do modelu srovnávaného s daty doplňovány postupně podle potřeby. Některé efekty se mohou projevit nejlépe ve vztazích mezi světelnými křivkami odpovídajícími různým barvám. To znamená, že v podstatě potřebujeme současně fitovat data modelovaná různými křivkami, které mají některé parametry společné (např. orbitální a geometrické) a jiné individuální (např. poměry svítivostí a okrajová ztemnění). Přednosti takového simultánního fitování všech dostupných dat ve srovnání s nezávislými řešeními v jednotlivých barvách (která se pak liší třeba nalezenými poloměry a sklonem dráhy) jsou zřejmé. Proto je přirozené do řešení zahrnout i fitování křivek radiálních rychlostí, které mohou poskytnout lepší informaci např. o některých orbitálních parametrech. FOTEL tak umožňuje řešit i podstatně jednodušší úlohu fitování samostatných křivek radiálních rychlostí, i když vzhledem ke svému obecnějšímu pojetí v této úloze nemůže být srovnatelně výkonný jako speciální jednoúčelové programy (typu SPEL). Naproti tomu nabízí možnost fitování řady přídavných parametrů (např. stáčení periastra nebo light-time efektu), i postupné přidávání dalších. Protože na jednodušším případě křivek radiálních rychlostí lze snáze ilustrovat některé vlastnosti programu, popíšeme je napřed a do větších detailů.

3.1 Řešení křivek radiálních rychlostí

Získáme-li z klasických měření radiálních rychlostí dostatečné pokrytí periody v časech $t_i|_{i=1}^N$ měřenými hodnotami v_i a můžeme-li zanedbat asymetrie čar vznikající asymetriemi atmosfér složek dvojhvězdy (takže dopplerovské posunutí optických středů čar odpovídá pohybu těžiště příslušné složky), pak můžeme fitováním křivky radiálních rychlostí

$$v_r(t) = K[\cos(\omega + \upsilon) + e\,\cos(\omega)] + \gamma\,, \tag{3.1}$$

metodou nejmenších čtverců, tj. minimalizací sumy

$$S_{RV}(p) = \sum_{i=1}^{N} (v_i - v_r(t_i, p))^2 \ , \tag{3.2}$$

nalézt hodnoty orbitálních parametrů p, tj. periody P, času průchodu periastrem t_0, excentricity e, délky periastra ω, amplitudy K, a radiální rychlost těžiště soustavy γ. Přitom pravá anomálie υ je dána excentrickou anomálií E

$$\upsilon = 2\mathrm{atan}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}\right) \ , \tag{3.3}$$

která je řešením Keplerovy rovnice

$$M \equiv 2\pi\frac{t-t_0}{P} = E - e\sin E \ , \tag{3.4}$$

a amplituda (tzv. K-rychlost) souvisí s poloosou a dráhy hvězdy (vůči těžišti) a sklonem dráhy i vztahem

$$K = \frac{2\pi a \ \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} \ , \tag{3.5}$$

které z křivky radiálních rychlostí nemůžeme určit samostatně.

Výraz (3.1) závisí lineárně na parametrech K a γ a silně nelineárně na jiných parametrech, např. P. Z výpočetního hlediska je to podstatný rozdíl, neboť v případě fitování metodou nejmenších čtverců měřených hodnot y_i funkcí $y(x,p)$, která je lineární kombinací libovolných funkcí $f_k(x)$,

$$y = \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(x) \ , \tag{3.6}$$

je minimalizovaná suma typu (3.2) nebo (3.10) kvadratická ve hledaných koeficientech úměrnosti p_k,

$$S(p) = \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(x_i)\right)^2 \ , \tag{3.7}$$

a příslušné podmínkové rovnice pro tyto koeficienty jsou pak lineární,

$$0 = \frac{\partial S}{\partial p_m} = -2\sum_{i=1}^{N} f_m(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(x_i)\right) \ . \tag{3.8}$$

Ve výrazu (3.1) by bylo možné linearizovat ještě závislost na délce periastra[1] ω úpravou

$$v_r(t) = [K\cos\omega]\cos\upsilon - [K\sin\omega]\sin\upsilon + [eK\ \cos(\omega) + \gamma] \ . \tag{3.9}$$

Podobně by bylo možné vypočítat přímo nezávisle K-rychlosti pro obě složky dvojhvězdy. Avšak vzhledem k tomu, že světelná křivka závisí na ω silně nelineárně (tato závislost se projevuje především v asymetrii času primárního a sekundárního minima) a pro eliptické dvojhvězdy závisí komplikovaně i na poměru hmotností složek (prostřednictvím slapové deformace) a tedy i na poměru jejich K-rychlostí, ve FOTELu je takovýto přímý výpočet užit

[1] Přesněji linearizovat v koeficientech $p_1 \equiv K\cos\omega$ a $p_2 \equiv K\sin\omega$, z nichž lze pak K a ω vypočítat.

pouze k výpočtu nulových bodů jednotlivých podsouborů dat (tj. příslušných γ-rychlostí pro radiální rychlosti a posunů vztažných hodnot magnitud pro fotometrii) a k výpočtu amplitudy K_1. Ostatní parametry jsou optimalizovány nelineární metodou, konkrétně simplexovou metodou podle Kallratha a Linnela (1987). I tak ovšem přímý výpočet nulových bodů (ev. K-rychlosti) představuje významnou časovou úsporu při výpočtu.

Další důležitou otázkou je velikost chyb nalezených hodnot parametrů. Jestliže předpokládáme, že nenulovost sumy čtevrců (3.2) je dána náhodnými chybami měření, pak poměr velikosti této sumy a jejích druhých derivací v optimální hodnotě parametrů (to znamená šířka nalezeného minima funkce $S(p)$) udává pravděpodobnou chybu nalezené hodnoty parametru (viz práci [E1]). Samotné chyby jednotlivých parametrů ovšem ještě nevypovídají o přípustných hodnotách parametrů, které jsou v souhlase s pozorováním. Příkladem mohou být délka periastra ω a čas průchodu periastrem t_0, které jsou pro dráhy s malou excentricitou e silně korelované a pro nulovou excentricitu zcela ztrácejí smysl. Při zafixované hodnotě jednoho z těchto parametrů je hodnota druhého určena v úzkém rozmezí času maxima a minima radiální rychlosti, takže formální chyba každého z nich je malá a přesto libovolné hodnoty obou mohou ve vhodné kombinaci dobře odpovídat v rámci chyb měření naměřeným radiálním rychlostem. Proto jsou na výstupu FOTELu vypočteny hodnoty nejen chyb jednotlivých parametrů, ale také kovarianční matice.[2]

3.2 Řešení světelných křivek

Jak je uvedeno u rovnice (3.5), ze samotných radiálních rychlostí nemůžeme určit současně poloosu a a sklon i. V případě zákrytových proměnných je ovšem informace o sklonu i obsažena ve světelných křivkách spolu s informací o dalších orbitálních i fyzikálních parametrech dvojhvězdy (např. o relativních poloměrech hvězd a jejich svítivostech). Proto je výhodné křivky radiálních rychlostí řešit simultánně se světelnými křivkami, tj. minimalizovat současně s funkcí $S_{fot}(p)$ podle (3.2) také odchylky

$$S_{fot}(p) = \sum_{i=1}^{M} (m_i - m(t_i,p))^2 \tag{3.10}$$

naměřených hvězdných velikostí m_i v jednotlivých barevných kanálech od teoretických světelných křivek $m(t)$. Funkce (3.2) a (3.10) mají řadu společných parametrů p, vůči jejichž změnám jsou různou měrou citlivé a jejichž optimální hodnoty pro každou z těchto funkcí se mohou poněkud lišit jak díky pozorovacím chybám, tak i díky nepřesnostem zvolených modelových funkcí $v_r(t,p)$ a $m(t,p)$. Zrovna tak se mohou lišit výsledky vypočtené z různých podsouborů dat (např. data z různých přístrojů a sezon, která se mohou lišit svými chybami, pokrytím periody nebo skutečnými změnami pozorované dvojhvězdy atd.). Proto v programu FOTEL, který tuto úlohu numericky řeší, minimalizujeme jistou lineární kombinaci sum pro jednotlivé podsoubory dat obou typů. Vhodnou lineární kombinaci dosáhneme váhováním jejich příspěvků k celkové minimalizované sumě, přičemž zvolené váhy v sobě implicitně zahrnují i normalizaci vůči volbě jednotek veličin v_r a m, které jsou rozdílné z hlediska fyzikálního rozměru. Pro volbu váhy neexistuje zcela objektivní kritérium a je třeba ji provádět s intuicí pro specifičnost studované soustavy. Zrovna tak při interpretaci

[2] Rozdílné metody minimalizace lineárních a nelineárních parametrů komplikují výpočet kovarianční matice, ve kterém je potřeba rozlišit případy kovariance dvou nelineárních, nelineárního s lineárním a dvou lineárních parametrů. Analogický výpočet chyb a kovariancí prozatím není realizován v KORELu, kde se jedná nejen o kovariance mezi orbitálními parametry (co do počtu srovnatelných s FOTELem) ale i o mnoho tisíc hodnot kovariancí orbitálních parametrů s intenzitami rozložených spekter v jednotlivých pixlech a mnoho milionů hodnot kovariance mezi všemi pixly.

získaných výsledků je třeba zpětně zvažovat možný vliv této volby. Alternativním přístupem je fitování některých podsouborů dat nezávisle a porovnání konzistence získaných výsledků (viz doplněk k práci [E1]). Tento přístup poskytuje informaci o chybě vypočtených optimálních hodnot parametrů, která je doplňkem k informaci dané kovarianční maticí.

Samotný model světelné křivky, tj. funkce $m(t,p)$, kterou fitujeme pozorované magnitudy, může být ve FOTELu počítán v principu různými způsoby. Úkolem modelu je vystihnout změny pozorovaného toku záření, které jsou způsobeny především změnou geometrie soustavy během zákrytu i mimo něj. Proto bývá považován za ideální model založený na Rocheově geometrii. Z Rocheova modelu vycházel i program ROCHE, který předcházel FOTELu a počítal syntetické světelné křivky. Neumožňoval sice jejich automatické porovnání s pozorovanými magnitudami, natož pak fitování volných parametrů modelu, zato umožňoval započítat vliv efektů popsaných v odstavci 2.1 na str. x. Vzhledem k náročnosti těchto výpočtů se ukázalo nezbytné[3] pro ladění FOTELu a jeho použití na větší objem pozorovacích dat nahradit rocheovský model jednodušším a výpočetně efektivnějším modelem. Tímto modelem je aproximace trojosých elipsoidů

$$0 = F(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i^{-2} x_i^2 - 1 \ , \tag{3.11}$$

s poloosami a_i ve směrech kartézských souřadnic x_i orientovaných k průvodci a kolmo na oběžnou rovinu. Tuto aproximaci ekvipotenciály dostaneme rozvojem Rocheova potenciálu do prvních nesférických členů, což znamená, že velikosti poloos jsou dány poměrem hmot složek a relativní velikostí složky, ev. její rotací (cf. práce [**29**] a [E1]). Plochu hvězdného disku viditelnou ze směru daného jednotkovým vektorem n_i pak můžeme vypočítat[4] jako plochu kruhového disku o poloměru

$$R_a = (a_1 a_2 a_3)^{1/2} (\sum_{i=1}^{3} a_i^{-2} n_i^2)^{1/4} \ . \tag{3.12}$$

Tím je dána proměnnost tzv. eliptických soustav. Výpočet přesné geometrie zákrytu eliptických složek je stále poměrně komplikovaný, proto jej nahrazujeme zákrytem kruhových disků o uvedeném poloměru. Přes všechna uvedená zjednodušení model trojosých elipsoidů dává dobré výsledky nejen pro soustavy dostatečně oddělených složek (pro které jsou zjednodušení zjevně oprávněná), ale např. i pro dotykové soustavy. Otevřenou otázkou zůstává, zda (či přesněji ve kterých případech) je zanedbání vyšších členů rozvoje odlišujících trojosé elipsoidy od geometrie Rocheových ekvipotenciál větší chybou pro výpočet světelných křivek než ostatní aproximace, které jsou v rocheovských modelech přijímány bez nejmenších pochyb. V každém případě úspora strojového času v modelu trojosých elipsoidů umožňuje namísto fitování střední fázové křivky fitovat všechna původní data, což je výrazné usnadnění a zpřesnění hlavně při výpočtu sekulárních změn.

Jedním ze záměrů dalšího rozvoje FOTELu je umožnit fitování světelných křivek i pro soustavy s podstatným vlivem okolohvězdné hmoty. Proto výpočet přesné geometrie byl již v programu ROCHE programován tak, aby umožňoval nejen geometrii Rocheových ekvipotenciál, ale zcela obecnou geometrii zakrývajících se těles (včetně akrečních disků a plynných proudů). K integraci intenzity záření po discích byly použity dva různé algoritmy: 1) promítání bodů na povrchu hvězd do rastru roviny kolmé na zorný paprsek a 2) přímé řešení viditelnosti v souřadnicové síti vypočtené na povrchu dvojhvězdy. Druhý způsob dává lepší

[3]Programy ROCHE i FOTEL vznikaly v osmdesátých letech na počítači EC 1040 a teprve později byl FOTEL převeden na PC a UNIXovské pracovní stanice.

[4]Cf. součin výrazů (4.21) a (4.22).

výsledky v případech, kdy některá ze složek má podstatně menší rozměry než celá soustava, je však numericky náročnější.[5] Spolupráce s moskevským kolektivem numeriků počítajících 3-dim. hydrodynamické modely (práce [74] a [76]) dala podnět k přeformulování první metody nikoliv pro pevné povrchy těles, ale obecně jako integraci podél zorných paprsků až do jisté optické hloubky v okolohvězdné hmotě a atmosférách složek.[6]

æ

[5] Na této metodě jsme spolupracovali v letech 1994 – 1997 s diplomantem panem M. Navrátilem z Pedagogické fakulty v Hradci Králové a později z MFF v Praze.

[6] Tuto metodu programoval v roce 1999 další diplomant, pan S. Preisig z univerzity v Trondheimu.

Kapitola 4

KOREL

Měření radiálních rychlostí a tím i výpočet orbitálních parametrů spektroskopických dvojhvězd je komplikováno blendováním (tj. překryvem) spektrálních čar obou složek. V mnoha případech, kdy jedna ze složek má podstatně slabší čáry než druhá, pozorujeme dvojhvězdu pouze jako jednosložkovou, čímž dostáváme pouze omezenou informaci o orbitálních parametrech, navíc možná zkreslenou nerozlišeným příspěvkem druhé složky k pozorovanému profilu čáry. Kromě toho i v případě dvojsložkové spektroskopické dvojhvězdy s amplitudou radiálních rychlostí dostatečně převyšující pološířku spektrálních čar, kdy ve většině fází můžeme zanedbat vliv blendování na měření radiálních rychlostí, je žádoucí oddělit z pozorovaných spekter příspěvky jednotlivých složek dvojhvězdy, abychom ke zjištěným orbitálním parametrům (a především k vypočteným hmotnostem) mohli přiřadit spektrální typy obou hvězd, případně jejich další spektroskopické charakteristiky. Proto v interpretaci spektroskopických pozorování dvojhvězd vyvstává úloha nalézt, oddělit a změřit příspěvky jednotlivých složek k celkovému spektru a vypočítat odtud fyzikální charakteristiky soustavy a obou hvězd. Klasický přístup je založen na rozdělení této úlohy do jednotlivých kroků, popřípadě na jejich iterativním zpřesňování. I k řešení těchto dílčích kroků v obtížnějších případech byly vytvořeny speciální metody, z nichž některé zde stručně shrneme, protože dobře ilustrují úskalí, se kterými se musíme vyrovnat při obecném řešení úlohy. V případě silně blendovaných spekter však může být vazba mezi jednotlivými kroky natolik těsná, že úlohu musíme řešit přímo jako současné nalezení orbitálních parametrů a spekter jednotlivých složek tak, aby nejlépe odpovídala napozorovaným spektrům.[1] Takto formulovanou úlohu nazýváme rozmotáváním (disentanglingem) spekter. Naše metoda využívající k jejímu řešení Fourierovy transformace (realizovaná v programu KOREL) ji přitom numericky zjednodušuje do té míry, že se stává snazší než klasický postup i v případech, kdy je použitelný, a navíc umožňuje další zobecnění k měření jevů dříve nepozorovatelných.

Dříve než přikročíme k vysvětlení podstaty metody fourierovského rozmotávání spekter, rozebereme klady a zápory dílčích metod, které jí předcházely.

4.1 Metoda cross-korelace

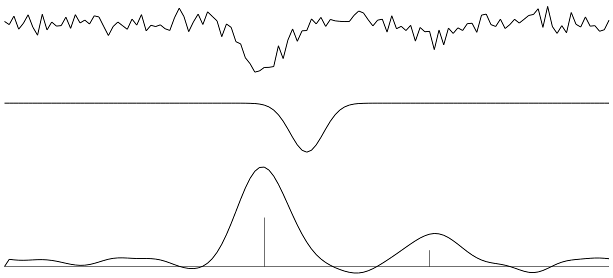
Tato metoda umožňuje nalézt v pozorovaném spektru i velmi slabé čáry sekundární hvězdy a měřit radiální rychlosti obou složek i při blendování jejich čar. Podstata metody spočívá v tom, že na místo samotného zářivého toku $I(x)$ v logaritmické vlnové délce $x = c\ln\lambda$

[1] Měření radiálních rychlostí v jednotlivých expozicích se přitom stává nepotřebným mezikrokem.

vyšetřujeme průběh jeho cross-korelace

$$F(v) \equiv \int I(x+v)J(x)dx \tag{4.1}$$

s vhodně zvoleným vzorovým (template) spektrem $J(x)$ (viz např. Simkin 1973, Hill 1993).[2]



Ukázka cross-korelace – superpozice čar dvou složek a šumu (na horním spektru) dá po korelaci s ideálním profilem (ve středním spektru) korelaci odpovídající profilu bez šumu (dolní křivka).

Ideálním vzorem J by bylo spektrum se stejným poměrem sil jednotlivých čar (tj. shodného spektrálního typu) jako má složka, jejíž radiální rychlost chceme měřit. V praxi bývá voleno buď pozorované spektrum hvězdy spektrálního typu blízkého očekávanému průvodci, nebo modelové teoretické spektrum. Zobecněním metody cross-korelace je dvoudimenzionální cross-korelace

$$F(v_1, v_2) = \int I(x)[J_1(x-v_1) + J_2(x-v_2)]dx \ , \tag{4.2}$$

která umožňuje volit vzorová spektra odpovídající spektrálním typům primární i sekundární složky (viz Zucker a Mazeh 1994, Zucker et al. 1995). I když praxe ukazuje, že výsledná cross-korelace je pouze slabě závislá na spektrálním typu zvoleného vzorového spektra, v principu to znamená, že ke změření radiálních rychlostí metodou cross-korelace potřebujeme znát spektra měřených složek.

4.2 Metody rozkladu spektra

K nalezení spekter jednotlivých složek dvojhvězdy lze využít několika metod, které předpokládají znalost radiálních rychlostí v příslušných expozicích. Především, ve výjimečných případech některých zákrytových dvojhvězd lze pořídit expozici čistého spektra jedné složky během totálního zákrytu jejího průvodce. Spektrum druhé složky pak můžeme nalézt odečtením tohoto spektra (příslušně dopplerovsky posunutého a přeškálovaného podle poměru úrovní kontinuí obou složek) od spektra pořízeného mimo zákryt. Pro nezákrytové soustavy lze užít metodu přímého rozdílu (Ferluga et al. 1991, 1997), ve které použijeme dvě spektra pořízená v různých fázích (a, b, nejlépe např. v opačných elongacích)

$$I_a(x) = J_1(x - v_{1a}) + J_2(x - v_{2a}) \ , \tag{4.3}$$

$$I_b(x) = J_1(x - v_{1b}) + J_2(x - v_{2b}) \ , \tag{4.4}$$

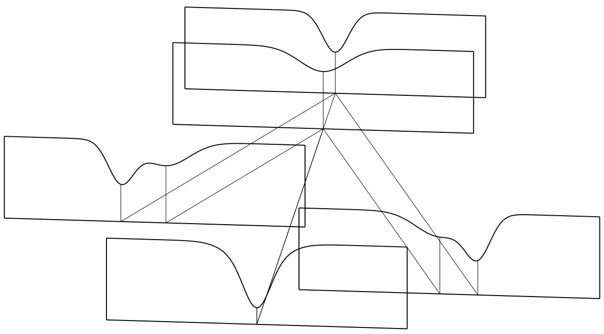
[2] Ve skutečnosti zpravidla pracujeme s relativně krátkými úseky odchylek rektifikovaného spektra od úrovně kontinua, takže F zjevně nabývá lokálního maxima pro hodnoty v, pro které je v I zastoupen dopplerovsky posunutý profil J, náhodný šum v I je však integrací potlačen. Získaný profil $F(v)$ je pak snáze aproximován jako superpozice příspěvků od obou hvězd.

a z nich vypočteme spektra jednotlivých složek rekurentně

$$J_1(x) = J_1(x - v_{1a} + v_{1b} + v_{2a} - v_{2b}) - I_a(x + v_{1b} + v_{2a} - v_{2b}) + I_b(x + v_{1b}) , \quad (4.5)$$
$$J_2(x) = J_2(x - v_{1a} + v_{1b} + v_{2a} - v_{2b}) + I_a(x + v_{2a}) - I_b(x - v_{1a} + v_{1b} + v_{2a}) , \quad (4.6)$$

přičemž postupujeme v kladném nebo záporném směru frekvenční proměnné x (podle znaménka výrazu $v_{1a} - v_{1b} - v_{2a} + v_{2b}$) od hodnot x, v nichž lze řešení aproximovat pouhým kontinuem, směrem ke skupinám čar. Na této jednoduché metodě je zřejmá potíž, která ve skutečnosti postihuje i následující sofistikovanější metody. Interval hodnot x pokrytý každou expozicí totiž obsahuje informaci o spektrech jednotlivých složek dvojhvězdy v intervalech posunutých o $v_{1,2}$, takže pouze v průniku těchto intervalů máme k dispozici potřebnou informaci o obou hledaných spektrech. K tomu, abychom spektra mohli oddělit, musíme doplnit chybějící informaci o spektru druhé složky (zpravidla předpokladem, že obsahuje pouze kontinuum bez čar), čímž se ovšem dopouštíme jisté chyby, která se pak může šířit i dále do počítaného intervalu. Hlavní nevýhodou Ferlugovy metody je ovšem skutečnost, že díky rekurentnímu postupu se v řešení kumuluje vliv náhodného pozorovacího šumu, který by měl být přičten na pravé straně rovnic (4.3) a (4.4), takže po projití skupinou čar se řešení může odchýlit od správné hodnoty kontinua. Příspěvek náhodného šumu (včetně jeho kumulativního vlivu na kontinuum) lze redukovat průměrováním výsledků vypočtených z většího počtu dvojic expozic. Je však zřejmé, že lepší řešení by měla poskytnout metoda, která by od počátku hledala řešení jako nejlepší aproximaci většího počtu spekter (což znamená, že řešení $J_{1,2}$ příslušné soustavy lineárních rovnic typu (4.3) je předeterminováno).

Tuto vlastnost má tzv. **metoda tomografické separace** (Bagnuolo a Gies 1991), která vychází z postřehu, že superpozice spekter různě dopplerovsky posunutých v různých orbitálních fázích je fakticky ekvivalentní projekci do různých směrů dvou lineárních zdrojů (nebo absorbérů) umístěných rovnoběžně v nenulové vzdálenosti. Rozložení jejich svítivosti (či opacity), odpovídající hledaným spektrům jednotlivých složek, tedy můžeme nalézt některou ze standardních numerických metod tomografie jako obraz dimenze $2 \times N$ (kde N je počet pixlů v typické expozici).[3]



Princip tomografické separace – projekce spekter jednotlivých složek (dvě spektra v pozadí) do různých směrů odpovídá dopplerovským posunům v různých fázích (tři spektra v popředí).

4.3 Metody rozmotávání spektra

Zatímco metoda popsaná v odstavci 4.1 umožňuje změřit radiální rychlosti při známých spektrech jednotlivých složek, metody uvedené v odstavci 4.2 dávají naopak tato spektra

[3]Ekvivalence těchto úloh můžeme využít i v opačném směru k uplatnění metod rozkladu spektra k tomografii.

pro známé radiální rychlosti. Máme-li k dispozici dostatečný počet spekter v různých fázích (tak, aby spektra složek jimi byla přeurčena, což je potřebné především k potlačení pozorovací šumu), pak je v nich obsažena informace i o všech těchto hledaných veličinách a v principu bychom ji mohli získat např. iterativním opakováním uvedených kroků. Přirozenější a ve svých důsledcích i numericky správnější a přitom z hlediska pracnosti úspornější řešení této úlohy je přímé fitování pozorovaných spekter modelem s volnými parametry obou druhů – jak spektry složek (z nichž každé představuje řádově tisíce neznámých hodnot intenzity v jednotlivých pixlech), tak radiálními rychlostmi (v počtu neznámých na každou expozici shodném s počtem hledaných složek). Takto formulované úloze dali Simon a Sturm (1994) název 'disentangling' (tj. rozmotávání) spekter. I když jejich matematický postup byl podstatně odlišný od cesty, kterou jsme v Ondřejově současně dospěli k téže úloze při studiu některých soustav pozorovaných 2-m dalekohledem (především 55 UMa), popis Simona a Sturma vystihuje i základní vlastnosti naší fourierovské metody,[4] a proto přejímáme jejich název pro samotnou úlohu formulovanou v této obecnosti. Rozklad spektra na složky je sice matematicky nejnáročnější částí úlohy, ale jak uvidíme dále, právě koncepce přímého fitování pozorovaných spekter simultánním řešením spekter složek a radiálními rychlostmi, resp. jinými parametry, představuje kvalitativní pokrok proti klasickým metodám. Vzhledem k tomu, že konečným cílem nejsou samotné radiální rychlosti, ale orbitální parametry, které v klasickém postupu získáváme následným řešením křivky radiálních rychlostí a které vlastně představují jisté fyzikálně zdůvodněné vazbové podmínky na hodnoty radiálních rychlostí, můžeme totiž úlohu přeformulovat i jako fitování pozorovaných spekter neznámými spektry jednotlivých složek a neznámými hodnotami orbitálních parametrů. Je však třeba si uvědomit, že tím klademe na řešení jisté předpoklady, které nemusí být ve skutečnosti splněny.[5] Křivky radiálních rychlostí mohou být např. deformovány různými asymetriemi profilů některé ze složek nebo spektra mohou obsahovat čáry pocházející z okolohvězdné hmoty. I proto je vhodné v případě, kdy řešíme přímo orbitální parametry, provést zkoušku, zda by jiné hodnoty radiálních rychlostí nedaly lepší souhlas s pozorovaným spektrem, a zvážit, zda nalezené odchylky jednotlivých radiálních rychlostí od křivky radiálních rychlostí jsou v mezích pozorovacích chyb, nebo svědčí o nějakém systematickém efektu ovlivňujícím tuto křivku. Dalším důvodem k dodatečnému výpočtu radiálních rychlostí může být skutečnost, že máme k dispozici rovněž fotometrii a je tedy vhodné řešit orbitální parametry simultánně z obou těchto zdrojů např. pomocí programu FOTEL. Alternativou by mohlo být přidání vazbových podmínek plynoucích z fotometrie do KORELu nebo jeho další zobecnění, resp. sloučení s FOTELem tak, aby minimalizoval současně vhodně váhované odchylky měření spektroskopických i fotometrických. Zde se otvírá široké pole působnosti, neboť zdokonalování modelů světelných křivek i spekter dvojhvězd má mnoho společných problémů spočívajících v teorii hvězdných atmosfér.

Vlastní rozklad spektra dvojhvězdy řeší Simon a Sturm (podobně jako Ferlugova metoda) přímo pro $2M$ hodnot spektrálního toku $\mathbf{I}_A$ a $\mathbf{I}_B$ složek A a B v jednotlivých hodnotách proměnné x (kde M odpovídá počtu pixlů expozic, typicky řádově 10^3). Pro tyto neznámé

[4] Patrně jediné, s čím v práci Simona a Sturma (1994) nelze souhlasit, je tvrzení na str. 291, že na rozdíl od problému tomografie, který je ve své podstatě analytický, problém rozkládání spekter (a tím i jejich rozmotávání) je ve své podstatě algebraický. (Viz pozn. 1 v práci [**79**].)

[5] Podobně by bylo možné klást fyzikální podmínky i na tvary spekter jednotlivých složek, např. z modelů hvězdných atmosfér, tj. fitovat pozorovaná spektra rovnou orbitálními parametry a základními parametry složek, jako jsou T_{ef}, g a R. Skutečná spektra složek dvojhvězdy ovšem mohou být značně ovlivněna okrajovým a gravitačním ztemněním slapově deformovaných složek nebo odrazovým efektem a řadou dalších jevů. Proto rozklad pozorovaného spektra na složky bez apriorních předpokladů na jejich tvar má svoji hodnotu.

dostávají soustavu $N \times M$ linearních rovnic (kde N je počet expozic, $N \geq 2$)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{A1} & \mathbf{M}_{B1} \\ & \dots \\ \mathbf{M}_{AN} & \mathbf{M}_{BN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}(t_1) \\ \dots \\ \mathbf{I}(t_N) \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

Na pravé straně této rovnice je N subvektorů $\mathbf{I}(t_l)$ dimenze M spekter pozorovaných v časech expozic $t_l|_{l=1}^{N}$. Submatice

$$\mathbf{M}_{jl} = \begin{array}{c} \overbrace{}^{v_j(t_l)} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.8}$$

dimenze $M \times M$ na levé straně mají nenulové pouze jednotkové prvky posunuté od hlavní diagonály o počet pixlů podle velikosti $v_j(t_l)$ Dopplerova posunu složky $j|_{j=A}^{B}$ v čase t_l. Tuto soustavu rovnic, jejíž matice je sice řídká, ale má velmi vysokou dimenzi, řešili Simon a Sturm metodou ‘singular value decomposition’. Svoji metodu aplikovali na reálná data v pracích Sturm a Simon (1994) a Simon et al. (1994). Pro úplnost dodejme, že tuto metodu testovali na simulovaných datech rovněž Hynes a Maxted (1998).

Na rozdíl od metody Simona a Sturma naše metoda tyto rovnice fourierovsky transformuje do reprezentace, v níž se rozpadají na vysoký počet nezávislých podsoustav nízké dimenze. Předpokládáme-li totiž, že pozorované spektrum v čase t je dáno vztahem

$$I(x,t) = \sum_{j=1}^{n} I_j(x) * \Delta_j(x,t,p) \ , \tag{4.9}$$

kde (napřed v původní jednoduché formě metody podle práce[6] [**44**]) zobecněná funkce

$$\Delta_j(x,t,p) = \delta(x - v_j(t,p)) \tag{4.10}$$

udává čistý dopplerovský posuv o radiální rychlost $v_j(t,p)$ (p vyjadřuje závislost na orbitálních parametrech) časově neproměnného spektra $I_j(x)$ j-té složky soustavy (v úvahu bereme nejen dvojhvězdy, ale i vícenásobné soustavy hvězd, nebo hledáme ve spektru i čáry vznikající v okolohvězdné hmotě nebo telurické čáry; n je celkový počet těchto složek přítomných ve výsledném spektru), pak Fourierovou transformací ($f(x) \to \tilde{f}(y) = \int \exp(ixy) f(x) dx$) rovnice (4.9) dostáváme

$$\tilde{I}(y,t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(y) \tilde{\Delta}_j(y,t,p) \ , \tag{4.11}$$

kde podle (4.10)

$$\tilde{\Delta}_j(y,t,p) = \exp(iyv_j(t,p)) \ . \tag{4.12}$$

Pro známé hodnoty orbitálních parametrů p implicitně obsažených v radiálních rychlostech jsou tak fourierovské mody $\tilde{I}(y,t)$ pozorovaného spektra lineární kombinací tvaru (3.6) známých komplexních funkcí $\tilde{\Delta}_j(y,t,p)$, a to pro každý mod y odděleně. V principu tedy můžeme fourierovské mody $\tilde{I}_j(y)$ hledaných spekter složek nalézt opět fitováním Fourierových

[6]Tato metoda je stručně shrnuta také v práci [66], kde je naznačeno i její zobecnění popsané v odstavci 4.5 (tiskovou chybou je zde však systematicky ’=3D’ místo ’=’).

transformací $\tilde{I}(y,t_l)|_{l=1}^N$ pozorovaných spekter metodou nejmenších čtverců, tj. minimalizací sumy[7]

$$S \equiv \sum_{l=1}^{N} \int \left| \tilde{I}(y,t_l) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(y)\tilde{\Delta}_j(y,t_l,p) \right|^2 dy \ , \tag{4.13}$$

která má opět tvar (3.7). Nutnou podmínkou řešitelnosti je, že hledané koeficienty $\tilde{I}_j(y)$ musí být přeurčeny, tj. především pozorovaných spekter musí být přinejmenším stejně jako hledaných složek ($N \geq n$). Kromě toho však musí hodnoty funkcí $\tilde{\Delta}_j$ dávat nesingulární matici $\sum \bar{f}_j f_m$ v rovnici (3.8), což zjevně nemůže být v případě (4.12) splněno např. pro $y = 0$ (protože všechna $\tilde{\Delta}_j$ jsou stejná), ale nemusí to být dobře splněno ani pro ostatní mody, jestliže pozorování budou špatně pokrývat fázovou křivku a neponesou tak potřebnou informaci o fázové změně spektra.

Při vlastním numerickém řešení užíváme k výpočtu Fourierovy transformace metodu FFT, která je úsporná jak z hlediska výpočetního času, tak i potřebné paměti. Fourierův obraz, který je tím reprezentován ve stejném počtu binů jako výchozí funkce, tak ovšem vlastně odpovídá dodefinování výchozí funkce jako periodické opakování vstupního intervalu. To znamená, že pokud by některá čára při okraji vstupního úseku spektra v některých orbitálních fázích zašla za hranici započteného intervalu x, pak by výpočetní metoda očekávala její objevení na opačné straně. Proto spektrum při okraji rozmotávaného úseku může být zkreslené[8] a je vhodné volit hranice úseku spektra tak, aby pro každou expozici padly do vlnových délek kontinua mezi týmiž čarami. Pokud to není možné (např. pro pozdní hvězdy), pak může částečně pomoci vhodná editace okrajů úseků vstupních spekter.

Je zřejmé, že minimalizace funkcionálu daného výrazem (4.13) odpovídá předpokladu bílého šumu, který způsobuje odchylky pozorovaných spekter $I(x,t_l)$ od modelu (4.9). Skutečný šum však nemusí být bílý, ale může některé harmonické mody postihovat více a jiné méně. Např. fotonový šum detektoru může zvýšit amplitudu vysokofrekvenčních modů odpovídajících vzorkovací frekvenci obrazu spektra, podobně, jako zrnitost emulze u fotografických spektrogramů. Naproti tomu např. chyby v rektifikaci spekter mohou zvýšit příspěvek nejnižších harmonik ke sledované sumě čtverců. Všechny takové případy můžeme ošetřit zavedením spektrální váhy $w(y)$ do integrace podle dy ve výrazu (4.13). Tato váha bude ekvivalentní příslušnému filtrování spekter. Neovlivní sice přímo nalezené amplitudy modů $\tilde{I}_j(y)$, pro které jsou podmínkové rovnice

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \bar{\tilde{I}}_m(y)} = -\sum_{l=1}^{N} \int \left[\tilde{I}(y,t_l) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(y)\tilde{\Delta}_j(y,t_l,p) \right] \bar{\tilde{\Delta}}_m(y,t_l,p) \tag{4.14}$$

pro jednotlivá y nezávislé, a ke získání filtrovaných spekter musíme tyto harmoniky váhovat teprve při výpočtu zpětné Fourierovy transformace. Filtrování spektrální váhou $w(y)$ však může ovlivnit optimalizaci S vůči parametrům p tak, aby řešení přednostně vyhovovalo těm modům, které nesou skutečnou informaci o hvězdných spektrech, a zanedbalo nebo potlačilo vliv těch modů, které jsou zatíženy šumem či jinými chybami.[9] Pro tuto optimalizaci totiž

[7] Příslušné funkcionály kvadratické v původní funkci $f(x)$ a jejím fourierovském obraze $\tilde{f}(y)$ jsou si totiž úměrné, neboť podle Parsevalovy věty $\int |\tilde{f}(y)|^2 dy = \int \bar{\tilde{f}}(y) \int \exp(ixy) f(x) dx dy = \int f(x) \int \overline{\tilde{f}(y) \exp(-ixy)} dy dx = 2\pi \int |f(x)|^2 dx$.

[8] Tento problém souvisí s 'rank deficiency' úlohy diskutované Simonem a Sturmem (1994).

[9] Ilijić a kol. (2000) navrhují (na základě svých zkušeností) zařadit filtrování vysokofrekvenčního šumu před vlastním rozkladem spekter. Zde uvedený rozbor ukazuje vliv takového kroku, i způsob, jak jej zahrnout přímo do stávajícího algoritmu. V programu KOREL je od samého počátku zahrnuta možnost odfiltrovat

dostáváme podmínkové rovnice

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial S}{\partial p} = &(4.15)\\
&= -2\Re \sum_{l=1}^{N} \int \left[\tilde{I}(y,t_l) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(y)\tilde{\Delta}_j(y,t_l,p) \right] \sum_{m=1}^{n} \bar{\tilde{I}}_m(y) \frac{\partial \bar{\tilde{\Delta}}_m(y,t_l,p)}{\partial p} w(y)dy \; .
\end{aligned}
$$

V obecném případě, jako třeba v případě orbitálních parametrů p (který je pro náš účel nejdůležitější), jsou tyto rovnice pro p nelineární, a proto je neřešíme v explicitním tvaru, ale numerickou minimalizací (konkrétně v KORELu simplexovou metodou) přímo funkce $S(p)$ dané výrazem (4.13).

KOREL jsme aplikovali na reálná data např. v pracích [49], [54], [57], [72], [74] a řada dalších aplikací je v přípravě. Ze zahraničních a smíšených skupin např. Zverko et al. (1997), Drechsel (1997), Lorenz et al. (1998, 1999), Hensberge et al. (2000).

4.4 Metoda relativní čarové fotometrie

Nejjednodušší, ale důležité zobecnění fourierovského rozmotávání spekter spočívá v nahrazení vztahu (4.10) vztahem

$$\Delta_j(x,t,p) = s_j(t)\delta(x - v_j(t,p)) \; , \tag{4.16}$$

tj. v zavedení časově proměnných multiplikativních faktorů $s_j(t)$ vyjadřujících okamžité síly čar jednotlivých složek. Odtud Fourierova transformace

$$\tilde{\Delta}_j(y,t,p) = s_j(t)\exp(iyv_j(t,p)) \; , \tag{4.17}$$

minimalizovaná suma čtverců (4.13) je v $s_j(t_l)$ kvadratická a podmínkové rovnice (4.15) pro tyto koeficienty (které můžeme považovat za přídavné parametry p funkcí Δ_j) jsou také lineární

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial S}{\partial s_m(t_l)} = &(4.18)\\
&= -2\Re \int \left[\tilde{I}(y,t_l) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(y)\exp(iyv_j(t_l,p))s_j(t_l) \right] \bar{\tilde{I}}_m(y)\exp(-iyv_m(t_l,p))w(y)dy \; ,
\end{aligned}
$$

i když celkově spolu s (4.14) jsou bilineární vůči s_j a I_k.[10]

(váhou 0) zvolený počet nejnižších harmonik, které mohou být ovlivněny špatnou rektifikací. Je zřejmé, že možnost volby obecnějších filtrů by v některých případech mohla být užitečná, zároveň by ovšem zkomplikovala obsluhu KORELu. Do úvah o filtrování spekter při jejich rozkládání vstupuje také okolnost, že jistého filtrování se dopouštíme již při rebinování výchozích dat do posloupnosti ekvidistantní v proměnné x. V programu PREKOR pro přípravu dat je užita lineární interpolace. Pokud je ovšem vzorkování napozorovaných spekter hustší než vnitřní diskretizace v KORELu, je vhodné odpovídajícím vyhlazením využít k potlačení šumu i informaci obsaženou v pixlech mezi intervaly, do nichž padají body zvolené posloupnosti x.

[10] Tuto okolnost je třeba mít na paměti při praktickém užití metody, neboť opakovaná řešení vůči jedné a druhé množině parametrů vedou obecně pouze k postupné konvergenci, nikoliv však k přímému nalezení definitivního řešení. Toto řešení navíc nemusí být (na rozdíl od prosté kvadratické funkce $S(p)$) jednoznačné a výsledek konvergence může záviset na počáteční aproximaci i pořadí řešení vůči oběma množinám parametrů. To lze ilustrovat na modelovém případu bi-kvadratické positivně definitní funkce $S(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 4xy + 1$, která má dvě lokální minima (s hodnotou $S = 0$) v bodech $x = y = \pm 1$, a mezi nimi sedlový bod (s hodnotou $S = 1$) v bodě $x = y = 0$.

Původní motivací tohoto zobecnění, které je základem metody 'relativní čarové fotometrie' zavedené v práci [**55**], byla skutečnost zjištěná při rozmotávání spekter hvězdy V436 Persei v práci [54], že radiální rychlosti vypočtené KORELem s konstantní sílou čar jsou výrazně méně přesné v blízkosti zákrytů než ve všech ostatních fázích. Příčinou bylo zjevně porušení předpokladu konstantnosti spekter I_j všech složek. Uvedené zobecnění, které odpovídá představě, že profily čar zakrývané složky se nemění, pouze zeslábne jejich hloubka (tj. síla), podstatně zlepšilo souhlas radiálních rychlostí v zákrytech s křivkou radiálních rychlostí odpovídající ostatním fázím.

Podstatný přínos tohoto zobecnění ovšem spočívá v možnosti oddělit z pozorovaných spekter nejen jednotlivé hvězdné složky, ale i telurické čáry, jejichž síla se může značně měnit v závislosti na vzdušné hmotě i povětrnostních podmínkách při jednotlivých expozicích. Jestliže pracujeme se spektry převedenými do heliocentrických vlnových délek, pak radiální rychlosti telurických čar budou opisovat křivku odpovídající přibližně[11] vztahu (3.1) s P, t_0 a e ročního pohybu Země a s K a ω závisícím ještě na ekliptikální délce a šířce pozorované hvězdy. Přibližné odhady pro tyto dva parametry poskytuje program PREKOR (verze z roku 2001). Telurické čáry zpravidla započítávame jako příspěvek fiktivní páté složky, pro kterou volíme poměr hmot do té míry malý, aby pohyb těžiště skutečné vícenásobné soustavy vůči fiktivnímu celkovému těžišti byl zanedbatelný. Síly telurických čar v jednotlivých expozicích přitom konvergujeme buď přímo v rozmotávaném úseku hvězdných čar, nebo je dopředu spočítáme z jiného úseku spektra, ve kterém převažují, nebo jsou dokonce jedinými čarami. Za povšimnutí stojí okonost, že při standardním zpracování spekter telurické čáry představují přídavný šum, a expozice s příliš silnými telurickými čarami jsou prakticky nepoužitelné alespoň v těch úsecích spektra, kde je jich velký počet. Při rozmotávání spekter jsou takové expozice naopak velmi užitečné, protože dobře definují telurické spektrum, a tím zpřesňují jeho oddělení i z ostatních expozic. Telurické spektrum můžeme využít i ke kalibraci škály vlnových délek a vyloučit tak instrumentální chyby vznikající posuvem srovnávacího spektra vůči hvězdnému.

Zajímavým a na první pohled poněkud překvapivým zjištěním při aplikaci metody relativní čarové fotometrie na zákryt dvojhvězdy je skutečnost, že síly čar zakrývané složky nemusí jen slábnout, ale v některých fázích zákrytu mohou naopak zesílit. Vysvětlení tohoto jevu pomocí proměnnosti okrajového ztemnění v profilu spektrální čáry je podáno v práci [**55**]. Ve fotosférách hvězd totiž zpravidla teplota klesá s výškou, a proto v kontinuu pozorujeme okrajové ztemnění, neboť při okraji disku zorný paprsek proniká pouze do chladnějších vnějších vrstev atmosféry a pozorovaná specifická intenzita je tedy dána nižší vydatností v těchto vrstvách. V absorpčních čarách ovšem i ve středu hvězdného disku vidíme pouze do vnějších vrstev atmosféry, takže okrajové ztemnění v čáře je podstatně menší (alespoň pokud jsou v příslušných čarách zanedbatelné non-LTE efekty a vydatnost opravdu klesá s výškou). Při zákrytu pouze okrajových částí hvězdného disku proto může ubýt podstatně větší poměrná část světla v čáře než v kontinuu a čára tím relativně zesílí. Čáry zakrývající složky dvojhvězdy v průběhu celého zákrytu relativně zesílí v důsledku úbytku příspěvku zakrývané složky k celkovému kontinuu soustavy.[12]

To znamená, že studium změny síly čar (popřípadě i jejich profilů) v průběhu zákrytu poskytuje přídavný nástroj k testování struktury atmosfér vypočtené pomocí modelů atmosfér. Odpovídající teoretickou studii změn profilu čáry po disku hvězdy provedli již dávno

[11]Pro přesnější výpočet můžeme vzít v úvahu rovněž vlastní rotaci Země, popřípadě i planetární korekce např. užitím procedury AABER1RV Rona a Vondráka (1986).

[12]Podle soukromého sdělení D. Holmgrena změny sil čar v blízkosti konjunkce složek se objevily i u některých soustav, ve kterých není pozorován zákryt ve standardní fotometrii. To by mohlo svědčit buď o zákrytu průvodce rozsáhlou obálkou (opticky tenkou v kontinuu, ale poněkud tlustší v čáře) zakrývající složky, nebo naopak o zákrytu podobné obálky kolem průvodce.

Mihalas a Auer (1970), kteří například ukázali, že na rozdíl od LTE-modelů jádro čáry H_α zůstává výraznější i při okraji disku, zatímco její křídla slábnou (viz též Mukherjee et al. 1996). Tyto efekty, přestože jejich výpočet je přirozeným vedlejším výsledkem každého modelu hvězdné atmosféry, však zůstávají stranou pozornosti, protože (s výjimkou případu Slunce) jsou většinou považovány za nepozorovatelné, neboť (na rozdíl od disentanglingu a jeho zobecnění) standardní hvězdná fotometrie nabízí porovnání modelů atmosfér s pozorováním pouze pomocí profilů čar, tj. pomocí frekvenční závislosti toku záření.

4.5 Rozmotávání spekter s proměnnými profily

U mnoha hvězd může být změna profilu čáry během zákrytu (popřípadě i mimo zákryt) podstatně komplikovanější než bylo popsáno v práci [**55**] a bude třeba vzít v úvahu i další jevy naznačené v tomto odstavci.[13] Jak je známo, u relativně těsných dvojhvězd se může projevit odrazový jev nebo slapová deformace a jí způsobené gravitační ztemnění na deformaci křivek radiálních rychlostí v důsledku deformace profilů čar a posuvu jejich efektivních středů vůči radiální rychlosti těžiště příslušné složky (viz např. Wilson 1994). U zákrytových dvojhvězd s rychle rotující složkou k tomu v průběhu zákrytu přistupuje tzv. rotační efekt.[14] Modelování těchto jevů (které ovšem bývají zanedbávány při řešení křivek radiálních rychlostí) vyžaduje integraci profilu čáry po discích obou hvězd, podobně jako modelování světelných křivek (tzv. light-curve modeling of radial-velocity curves). Správně by se přitom lokální profily měly počítat z modelů atmosfér podobně jako v uvedené práci Mihalase a Auera (1970), a to navíc z modelů třírozměrných v případě slapové deformace, nebo ozářených z vnějšku v případě odrazového efektu. V každém případě však tyto jevy způsobují fázovou proměnnost profilů čar alespoň některé ze složek dvojhvězdy, a to nejen co do síly, jak bylo uvedeno v předchozím odstavci. Dalšími příčinami změn profilů mohou být buď pulzace některé ze složek, nebo přítomnost skvrn na jejím (obecně rotujícím) povrchu. Proto je žádoucí zobecnit metodu rozmotávání spekter tak, aby mohla alespoň přibližně započítat tyto jevy.

Jako první modelový případ uvažujme rotační rozšíření čar složky slapově deformované do tvaru trojosého elipsoidu (3.11). Předpokládejme rotaci (rychlostí v^i) tuhého tělesa s úhlovou rychlostí Ω_i. Radiální rychlost ve směru zorného paprsku daného jednotkovým vektorem n_i tedy bude

$$v_r = n_i v_i = \epsilon^{ijk} n_i \Omega_j x_k \ , \tag{4.19}$$

a její maximum[15] je dáno vztahem

$$v_{max}^2 = 2\alpha v_{max} = |\epsilon^{ijk}| a_i^2 (n_k^2 \Omega_j^2 - n_j \Omega_j n_k \Omega_k) \ , \tag{4.20}$$

což (pro Ω_i vázané na orbitální rotaci ve směru osy x_3) znamená fázovou změnu

$$v_{max}^2 = \Omega^2 (a_1^2 n_2^2 + a_2^2 n_1^2) \tag{4.21}$$

rotačního rozšíření podle okamžité velikosti hvězdného disku ve směru kolmém na rotační

[13] Námět na zahrnutí těchto efektů do metody rozmotávání vzešel od R. E. Wilsona při jeho návštěvě v Ondřejově a zde uvedená matematická formulace (dosud nerealizovaná v počítačovém programu) bude součástí připravované společné publikace.

[14] Tento jev bývá často nesprávně nazýván Rossiterovým. Rossiter sám se však ve své první práci na toto téma (Rossiter 1924) odvolává na průkopnickou práci Schlesingera (1909).

[15] Jak vyplývá z podmínkové rovnice $0 = \partial_{x_i} v_r + \alpha \partial_{x_i} F = \epsilon^{ijk} n_j \Omega_k + 2\alpha a_i^{-2} x_i$.

osu. Podobně pro průřez disku ve směru projekce rotační osy dostáváme[16]

$$s^2 = \frac{[\Omega^2 - (n\Omega)^2]\sum a_i^{-2}n_i^2}{\sum a_i^{-2}\Omega_i^2 \sum a_j^{-2}n_j^2 - (\sum a_i^{-2}n_i\Omega_i)^2} = \frac{a_3^2(1-n_3^2)(a_1^{-2}n_1^2 + a_2^{-2}n_2^2 + a_3^{-2}n_3^2)}{a_1^{-2}n_1^2 + a_2^{-2}n_2^2} \ . \quad (4.22)$$

Pokud bychom zanedbali výše uvedenou rozdílnost okrajového ztemnění v čarách a kontinuu a přijali jsme nesprávné, ale běžně užívané[17] přiblížení konstantní intenzity $I_j(x)$ po celém disku, pak pozorovaný příspěvek j-té složky k celkovému spektru soustavy bude měnit s fází profil i sílu čáry v důsledku proměnnosti pozorovaného tvaru disku trojosého elipsoidu. Celkové spektrum můžeme opět popsat vztahem (4.9), jestliže výraz (4.16) dále zobecníme na tvar

$$\Delta_j(x,t,p) = s_j(t)\delta(x - v_j(t,p)) * R(\frac{x}{v_{max}}) \ , \quad (4.23)$$

kde s je dáno výrazem (4.22), v_{max} výrazem (4.21) a rotační rozšíření

$$R(\frac{x}{v_{max}}) = R_0(\frac{x}{v_{max}}) \equiv \left(1 - \frac{x^2}{v_{max}^2}\right)^{1/2} \ , \quad (4.24)$$

jestliže zcela zanedbáme okrajové ztemnění i v kontinuu. Rovnice (4.11) pak bude platit v nezměněné podobě, jestliže v ní (4.17) nahradíme Fourierovou transformací

$$\tilde{\Delta}_j(y,t,p) = s_j(t)\exp(iyv_j(t,p))\tilde{R}(yv_{max}) \quad (4.25)$$

výrazu (4.23), tj. přidáme součin s Fourierovou transformací (4.24). V principu potom při rozmotávání spekter můžeme konvergovat i volné parametry vztahů (4.22) a (4.21), jako jsou např. poměry poloos nebo sklon soustavy, a z rozkladu spektra získat nejen samostatná spektra jednotlivých složek, ale pro složky s proměnnými profily rovnou jejich spektra dekonvoluovaná o rotační rozšíření. Vztah (4.24) by bylo možné zobecnit i zahrnutím vlivu okrajového (popřípadě i gravitačního) ztemnění v kontinuu ve výše popsaném přiblížení (srov. pozn. 17).[18] Podobně by bylo možné postupovat i při redukci vlivu rotačního efektu nahrazením (4.24) rozšířením na částečně zakrytém disku rotující hvězdy, nebo při řešení dalších podobných úloh, v nichž se mění geometrie různě zářících oblastí, např. na povrchu hvězd se skvrnami nebo pulsujících či ozářených hvězd.

Vzhledem k výše uvedené komplikaci s okrajovým ztemněním v čarách je však uvedená metoda pouze částečným zpřesněním a správnější je následující zobecnění problému. Monochromatický tok záření pozorovaný v čase t je dán integrálem po viditelných částech d^2s povrchů jednotlivých složek

$$I(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \int_s \mu I_j(x,s,\mu,t) * \delta(x - v_j(s,t)) d^2s \ , \quad (4.26)$$

kde $\mu = \mu(s,t) \equiv \cos\vartheta$ je směrový kosinus úhlu mezi zorným paprskem a normálou k povrchu hvězdy. Neznámé funkce $I_j(x,s,\mu,t)$ závisejí na větším počtu proměnných (explicitní

[16]Vycházíme přitom z podmínkové rovnice $0 = \delta s^2 + \alpha\delta F = 2\sum[x_i - (nx)n_i + \alpha a_i^{-2}x_i]\delta x_i$. Součin tohoto průřezu a maximálního příčného rozměru, který určuje i maximální rotační rozšíření (4.21), udává viditelnou plochu hvězdného disku v souhlase s (3.12), která v rámci přijatého zjednodušení určuje i sílu čáry a její změnu v důsledku elipticity.

[17]Při numerickém modelování spekter rotujících hvězd se totiž zpravidla vypočítá spektrum nerotující hvězdy jako frekvenční závislost toku F_ν záření (což ovšem odpovídá již intenzitě vyintegrované přes celý disk), a to je tzv. rozrotováno konvolucí s profilem rotačního rozšíření, které buď předpokládá homogenní rozložení intenzity po disku, v lepším případě rozložení modulované okrajovým ztemněním v kontinuu.

[18]Pokud bychom použili příslušný výraz pro sférickou hvězdu, pak se aplikací na trojosý elipsoid dopustíme dalšího zjednodušení zanedbáním asymetrie rozložení směrových kosinů po disku.

závislost na čase t může odpovídat například případu pulsujících hvězd) než pozorovaný tok $I(x,t)$, proto je zjevně nelze zrekonstruovat z pozorování bez přídavných předpokladů omezujících dimenzi prostoru nezávisle proměnných. Takové předpoklady mohou vyplývat buď z prostorových symetrií (jako byl předpoklad homogennosti disku, který nám umožňoval vynechat závislost na s), nebo z fyzikálních zákonitostí. Například závislost na μ by sice mohla být obecně složitá a měnit tak vzhled hvězdy a jejího spektra rovněž velmi komplikovaným způsobem. Teoretické studie (alespoň pro okrajové ztemnění v kontinuu, viz např. Van Hamme 1993) však ukazují, že je lze dost dobře aproximovat např. přidáním logaritmického členu $\mu \ln \mu$ k obvyklému konstantnímu a lineárnímu členu. Podobně vliv gravitačního ztemnění, které způsobuje závislost na s, se alespoň podle standardního von Zeipelova modelu redukuje na závislost na lokální efektivní teplotě dané tíhovým zrychlením g, takže již rekonstrukce spektra v bodech s nejvyšší a nejnižší hodnotou g (a určení T_{eff} porovnáním s modelovými spektry) by nahradila rekonstrukci v celém dvouparametrickém prostoru s. Vždy tedy můžeme předpokládat alespoň jako jisté přiblížení, že lokální specifická intenzita je lineární kombinací několika málo neznámých spektrálních funkcí $I_j^k(x)$

$$I_j(x,s,\mu,t) = \sum_k f_j^k(s,\mu,t) I_j^k(x) \tag{4.27}$$

s koeficienty f_j^k, jejichž závislost na pozici na povrchu s hvězdy, na směrovém kosinu a ev. na čase můžeme modelovat alespoň až na několik málo volných parametrů p. Dosazením tohoto předpokladu se rovnice (4.26) redukuje na tvar

$$I(x,t) = \sum_{j,k} I_j^k(x) * \Delta_j^k(x,t,p) \ , \tag{4.28}$$

kde spektrální rozšíření

$$\Delta_j^k(x,t,p) = \int_s \mu f_j^k(s,\mu,t) \delta(x - v_j(s,t)) d^2 s \ . \tag{4.29}$$

Ten je formálně analogický rovnici (4.9), až na to, že každá složka je nyní charakterizována několika spektrálními funkcemi $I_j^k(x)$ charakterizujícími různé mody záření téže složky (např. různé členy rozvoje okrajového ztemnění), z nichž každá je rozšířena jinou funkcí $\Delta_j^k(x)$ (různost těchto funkcí rozšíření alespoň v některých fázích je současně podmínkou rozlišitelnosti spekrálních funkcí z pozorování).

Různými volbami rozkladu (4.27) tak můžeme nalézt spektrální charakteristiky nejen různých složek vícenásobné soustavy, ale například i různých vrstev atmosféry téže složky zákrytové soustavy, nebo různých částí povrchu téže hvězdy. Různými modifikacemi fourierovského rozmotávání tedy docházíme ke společnému zobecnění i s další významnou spektroskopickou metodou, kterou je dopplerovská tomografie a dopplerovské zobrazování.

4.6 Rozmotávání spekter a dopplerovské zobrazování

Jak bylo uvedeno v odstavci 4.2, jednou z prvních metod rozkladu spekter na složky byla metoda tomografické separace, založená na matematické podobnosti úlohy počítačové rekonstrukce tomografických řezů s úlohou rozlišení složek ve spektru dvojhvězdy. Jestliže nyní máme rozmotávání spekter zobecněné na větší počet složek, pak speciálním případem dílčí úlohy rozkladu těchto spekter na složky je i obecný problém tomografické rekonstrukce. Každý řádek rekonstruovaného obrazu totiž můžeme považovat za spektrum jedné složky a předepsat jí dopplerovské posunutí úměrné poloze řádku a sinu úhlu natočení zobrazovaného tělesa (naexponovaný řez je přitom potřeba přeškálovat v poměru kosinu téhož úhlu, aby odpovídal prostému posunutí jednotlivých řádků). Tato analogie obou úloh a její možné využití je tématem práce [**79**]. Fourierovská metoda rozkladu spekter by v této aplikaci mohla být alternativou k metodě maximální entropie (viz Skilling a Bryan, 1984) užité Marshem a Hornem (1988), i metodě (filtrované) zpětné projekce, nejčastěji užívané v lékařské tomografii (viz např. Gordon, Herman, Johnson 1975) a v astrofyzice užité např. Hornem (1991). To by mohlo přinést praktické výhody, pokud by se podařilo dosáhnout touto cestou vyšší výpočetní rychlosti (na vyšší rychlost fourierovských metod upozorňují např. Placidi et al., 1998).[19]

V astrofyzice je úloha tomografické rekonstrukce obrazu užívána v tzv. dopplerovské tomografii (Marsh a Horne 1988) založené na skutečnosti, že profil silně dopplerovsky rozšířené čáry dvourozměrného zdroje je dán Radonovou[20] (1917) transformací

$$I(v_r, \varphi(t)) = \int J(v_x, v_y)\delta(v_r - v_x \cos\varphi - v_y \sin\varphi) dv_x dv_y \ , \tag{4.30}$$

tj. projekcí do radiální rychlosti v_r rozložení emisivity J závisející na vektoru (v_x, v_y) rychlosti zdroje, takže o ní přináší podobnou informaci jako projekce dvourozměrného tělesa o rozložení emise či absorpce do příčného směru. Ze série spekter (pořízených v různých fázích) rotujícího časově neměnného objektu tedy můžeme standardní metodou počítačové tomografie[21] zrekonstruovat rozložení emisivity ve dvourozměrném rychlostním prostoru. Základní podmínkou je předpoklad, že šířka čáry je zanedbatelná vůči dopplerovskému rozšíření, takže ji můžeme považovat za δ-funkci.[22] Kromě toho musí být splněna podmínka stálé viditelnosti všech částí zdrojového objektu. Proto v této základní podobě je metoda dopplerovské tomografie nejlépe použitelná k mapování akrečních disků kataklizmických proměnných, kde jsou dostatečně vysoké keplerovské rychlosti okolohvězdné hmoty a zanedbatelné její stínění hvězdami soustavy. Kromě toho v případě keplerovských akrečních disků máme k dispozici jednoznačné přiřazení mezi rychlostním prostorem a plochou disku (přes tento obraz se pak překládá teoreticky opět snadno modelovatelná trajektorie plynného proudu z bodu L_1).

Kromě popsané metody dopplerovské tomografie existuje celá škála metod shrnovaných pod název dopplerovské zobrazování, které umožňují mapovat prostorové rozložení emisivity v nejrůznějších objektech na základě deformací profilů čar způsobených Dopplerovým jevem v různě se pohybujících částech zdroje. Nejnovější přehled těchto metod poskytne sborník, ve kterém je zařazena i práce [**79**]. Zatímco cílem metody rozmotávání spekter je získat spektra částí zdroje (např. složek vícenásobné hvězdné soustavy) za jistých předpokladů o jejich geometrii a dynamice, společným rysem metod dopplerovského zobrazování je naopak mapovat objekty (tj. získat informaci o jejich geometrii, ev. částečně i dynamice v případě pulsujících hvězd) na základě apriorních předpokladů o vlastním spektru jednotlivých částí zdroje. Kýženým cílem by byla možnost získat z pozorovaných spekter informaci jak o geometrii a dynamice, tak i o spektrálních (ev. fyzikálních) charakteristikách zdroje bez jakýchkoliv apriorních předpokladů. Vzhledem k tomu, že však vycházíme z časové posloupnosti spekter, tj. ze skalární funkce dvou proměnných, je zřejmé, že nemůžeme získat neomezeně spojitou

[19]Fourierovské metody jsou užívány v rekonstrukci obrazu v lékařských aplikacích magnetické rezonance, viz např. Duerk (1999).

[20]Johann Radon, ∗ 1887 Děčín, † 1956 Vídeň.

[21]Za vypracování této diagnostické metody získali G. Hounsfield a A. Cormack r. 1979 Nobelovu cenu.

[22]Pokud by skutečný lokální profil čáry byl známý a neměnný v celém zdroji, pak by bylo možné toto omezení zmírnit dekonvolucí s tímto profilem, což vlastně odpovídá numerickému zaostření tomograficky rekonstruovaného obrazu.

informaci o jednorozměrných spektrech na dvoudimenzionálním povrchu zdroje (natož pak v jeho trojdimenzionálním objemu, nebo ještě o jeho časové proměnnosti). Lze však volit jistý kompromis, jestliže hledané prostorové rozložení diskretizujeme např. způsobem navrženým v předcházejícím odstavci (viz rov. (4.29), kde různá f_j^k mohou mít nosiče v různých částech mapované oblasti). Nabízí se možnosti hledat i spektrum v jiné reprezentaci než jako funkci x nebo její Fourierovu transformaci, například tak, abychom využili modelů formování spektra a fyzikálních vztahů mezi čarami v různých spektrálních oblastech. Namísto mapování prostorového rozložení emisivity bychom tak získávali rozložení fyzikálních charakteristik zářícího prostředí. V tomto směru se otvírá nepřeberné množství možností k vytváření nových spektroskopických metod. Při interpretaci jejich výsledků je ovšem třeba mít vždy na paměti závislost na vstupních předpokladech. Jestliže tedy například metodou disentanglingu úspěšně rozložíme pozorovaná spektra na dvě složky, pak i rozumný tvar jejich spektra je pouze podmínkou nutnou, nikoliv však postačující k tomu, aby dvojhvězdný model byl správný. Nelze totiž vyloučit, že do předepsané formy rozložení celkového spektra se promítla superpozice spekter odpovídajících jiným než orbitálním pohybům uvnitř zdroje.

Literatura

Bagnuolo W. G. Jr., Gies D. R. 1991, ApJ 376, 266

Drechsel H., Weeber M., Lorenz R., Hadrava P. 1997, AG Abstract Series 13, 207

Duerk J. L. 1999, Physics of MR Imaging 7, 629

Ferluga S., Floreano S., Mangiacapra D. 1991, La Lettre de l'OHP 6, 3

Ferluga S., Floreano S., Bravar U., Bédalo C. 1997, A&AS 121, 201-209

Formiggini L., Leibowitz E. M. 1990, A&A 227, 121

GordonR., Herman G. T., Johnson S. A. 1975, Sci. Am. 233, Oct., p. 56

Hensberge H., Pavlovski K., Verschueren W. 2000, A&A 358, 553

Hill G. 1993, in *New Frontiers in Binary Stars Research*, K.-C. Leung, I.-S. Nhu (eds.), Astron. Soc. Pac. Conf. Ser. vol. 38, 127

Horne K. 1991, v *Proc. of 12th North Am. Workshop on CV and LM X-Ray Binaries*, ed. A.W.Shafer, San Diego, SDSU Press, p. 23

Hynes R. I., Maxted P.F.L. 1998, A&A 331, 167

Ilijić S., Hensberge H., Pavlovski K. 2000, *Fourier disentangling of composite spectra*, v tisku v *Proc. of astrotomography workshop*, ed. H. Boffin, Brusel

Kallrath J., Linnel A. P. 1987, ApJ 313, 346

Kallrath J., Milone E. F. 1999, *Eclipsing Binary stars – Modeling and Analysis*, Springer, New York, Berlin etc.

Kopal Z. 1970, Astrophys. Sp. Sc. 8, 149

Kopal Z. 1989, *The Roche Problem*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London

Lorenz R., Mayer P., Drechsel H. 1998, A&A 332, 909

Lorenz R., Mayer P., Drechsel H. 1999, A&A 345, 531

Lubow S. H., Shu F. H. 1975, ApJ. 198, 383

Marsh T. R., Horne K. 1988, MNRaS 235, 269

Mihalas D., Auer L. H. 1970, ApJ 161, 1129

Mukherjee J., Peters G. J., Wilson R. E. 1996, MNRAS 283, 613

Paczyński B. 1977, ApJ 216, 822

Placidi G., Alecci M., Colacicchi S., Sotgiu A. 1998, Journal of Magnetic Resonance 134, 280

Radon J. 1917, Berichte Sächsische Akad. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl. 29, 262

Ron C., Vondrák J. 1986, BAC 37, 96

Rossiter R. A. 1924, ApJ 60, 15

Schlesinger F. 1909, Publ. of the Allegheny Obs. 1, 123

Simkin S. M. 1973, A&A 31, 129

Simon K. P., Sturm E. 1994, A&A 281, 286

Simon K. P., Sturm E., Fiedler A. 1994, A&A 292, 507

Skilling J., Bryan R. K. 1984, MNRAS 211, 111

Sturm E., Simon K. P. 1994, A&A 282, 93

Suzuki M. 1980, PASJap 32, 331

Van Hamme W. 1993, AJ 106, 2096

Wilson R. E. 1994, PASP 106, 921

von Zeipel H. 1924a, MNRAS 84, 665

von Zeipel H. 1924b, MNRAS 84, 784

von Zeipel H. 1924c, MNRAS 84, 702
Zucker S., Mazeh T. 1994, ApJ 420, 806
Zucker S., Torres G., Mazeh T. 1995, ApJ. 452, 863
Zverko J., Žižňovský J., Khokhlova V.L. 1997, Contr. Astron. Obs. Skal. Pleso 27, 41

Seznam publikací a citací

V následujícím seznamu jsou uvedeny všechny mé dosavadní odborné publikace. Práce zařazené do disertace jsou zvýrazněny tučným písmem. Značky $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ a $\mathcal{H}$ rozlišují práce ze stelární astrofyziky, relativistické astrofyziky a historie astronomie. Citace jsou shromážděné na základě SCI, ADS i náhodných zjištění (např. v případech citací v monografiích). Ze seznamu jsou vyloučeny mé autocitace, pro účely sledování dalšího vývoje témat jsou však zaznamenány autocitace spoluautorů označené ⋄ (jejich počet k datu 16.4.2001 je 59); 'čisté' citace jsou označeny ◇ (jejich počet je 187). Neuvádím zde seznam vydaných abstraktů a recenzí (celkem přibližně dvaceti), ani popularizačních článků (kterých je také přibližně dvacet). V následujícím seznamu elektronických publikací na str. xliv (v odkazech značených [E...]) jsou uvedeny jednak manuály k mému softwaru, který je dnes poměrně často užíván v mnoha zemích (a občas citován odkazem právě na tyto on-line manuály), a dále učební texty k mým vysokoškolským přednáškám.

[1] $\mathcal{S}$ Harmanec P., Krpata J., Hadrava P. 1971, BAC 22, 87-91: "A Spectroscopic Study of the Shell Star EW Lac (HD217050)"
◇ Granes P. (72) A&A 19, 224
◇ Kogure T. (75) PAS Jap. 27, 165
◇ Poeckert R. (80) Publ. Dom. Astrophys. Obs. 15, 357
◇ Scholz G. (81) BAC 32, 56
◇ Hubert A.M. et al. (87) A&AS 70, 443

[2] $\mathcal{S}$ Heinzel P., Hadrava P. 1975, BAC 26, 90-91: "Precise Measurement of Radial Velocity Using a LIREPHO Microphotometer"
◇ Koubský P. (78) BAC 29, 288

[3] $\mathcal{R}$ Bičák J., Hadrava P. 1975, A&A 44, 389-399: "General-relativistic Radiative Transfer Theory in Refractive and Dispersive Media"
◇ Anile A.M. (76) Univ. of Catania preprint
◇ Anile A.M. (77) Phys. Lett. A 61, 215
◇ Dautcourt G., Rose K. (78) Astron. Nachr. 299,13
◇ Anile A.M., Pantano P. (79) J. Math. Phys. 20, 177
◇ Evangelidis E.A. (79) Astrophys. Sp. Sc. 60, 213
◇ Breuer R.A., Ehlers J. (80) P. Roy. Soc. A 370, 389
◇ Breuer R.A., Ehlers J. (81) A&A 96, 293
◇ Breuer R.A., Ehlers J. (81) P. Roy. Soc. A 374, 65
◇ Anile A.M. (89) Relativistic fluids and magneto-fluids, Cambridge Monographs on Mathematical Physics
◇ Perlick V. (00) Ray optics, Fermat's principle, and applications to general relativity, Lecture notes in physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2000

[4] $\mathcal{R}$ Bičák J., Hadrava P. 1975, Scripta Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, Physica 3-4, 5: 191-192: "General-relativistic Radiative Transfer Theory in Refractive and Dispersive Media"

[5] $\mathcal{S}$ Hadrava P., Harmanec P., Koubský P., Krpata J., Žďárský F. 1978, IAUC 3317: "EW Lacertae"
◇ Hirata R., Kogure T. (79) IBVS 1575
◇ Poeckert R. (80) Publ. Dom. Astrophys. Obs. 15, 357
⋄ Harmanec P. (80) BAC 31, 144

$\Diamond$ Scholz G. (81) BAC 32, 56
$\Diamond$ Percy J.R. et al. (81) Astron. J. 86, 53
$\Diamond$ Antonello E. et al.(82) Astrophys. Sp. Sc. 83, 381
$\Diamond$ Iliev L.H., Kovachev B.Z. (84) Dokl. Bolg. Akad. Nauk 37, 983
$\Diamond$ Goraya P.S., Singh M. (85) Astrophys. Sp. Sc. 108, 161

[6] $\mathcal{S}$ Kříž S., Hadrava P. 1979, "Problém teoretických modelů rozsáhlých hvězdných atmosfér", In: "Galaxie, její prvky a subsystémy", ed. J. Bouška a Harmanec P., str. 91

[7] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1981, Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. No. 57, 7-8: "Radiative Transfer in Roche Coordinates"

[8] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1983, BAC 34, 234-241: "Simple Kinetic Model of a Multiparticle Cloud"
$\Diamond$ Lála P. (86) BAC 37, 239
$\Diamond$ Kříž S. (88) PAICS 70, 295

[9] Šíma Z., Klokočník J., Hadrava P. 1983, BAC 34, 302-311 (errata – 1984, BAC 35, 128): "A Comparison of Earth Models by Means of their Higher Frequency Parts"
$\diamond$ Klokočník J. (86) BAC 37, 26
$\diamond$ Šíma Z., Klokočník J. (86) BAC 37, 229
$\diamond$ Klokočník J. (87) HR, 221
$\Diamond$ Karlický M. (88) BAC 39, 13
$\diamond$ Straka J., Klokočník J., Grassl H. (93) Int. J. Remot. 14, 1981

[10] $\mathcal{R}$ Hadrava P. 1983, BAC 34, 374-376: "Dynamical Friction Due to Cosmological Background"

[11] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1984, BAC 35, 335-343: "Simple Kinetic Model of a Multiparticle Cloud II. Gaseous Streams in Algols"
$\Diamond$ Ivanov L. N. (87) Astrofyz. (Arm.) 27, 159
$\Diamond$ Kříž S. (88) PAICS 70, 295
$\Diamond$ Bolton C. T. (89) Sp. Sc. R. 50, 311
$\Diamond$ Bašný M. (96) "Physical Processes in Interacting Binaries", p. 3

[12] $\mathcal{R}$ Hadrava P., Karas V. 1984, BAC 35, 343-346: "Dynamical Friction Due to Cosmological Background II. Newtonian Cosmology"
$\Diamond$ Lipunov V.M., Simakov S.G. (86) Astrophys. Sp. Sc. 123, 393
$\diamond$ Karas V., Mucha R. (93) Amer. Jour. of Phys. 61, 825-828

[13] $\mathcal{S}$ Hadrava P., Kadrnoška J. 1986, Cel. Mech. 39, 267-281: "Comparison of Analytical and Numerical Calculations of the First Class Periodic Orbits"
$\Diamond$ Anderson J. (88) A&A 207, 37
$\Diamond$ Hadjidemetriu J. (89) Cel. Mech. 43, 371

[14] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1986, Hvar Obs. Bull. 10, 1-10 (errata – 1987, Hvar Obs. Bull. 11, 151): "Roche Lobe in Eccentric Orbits"
$\Diamond$ Balona L.A., Cuypers J. (93) MNRAS 261, 1-10
$\Diamond$ Skopal A. (94) A&A 286, 453-462
$\Diamond$ Wilson R.E. (94) PASP 106, 921-941
$\Diamond$ Skopal A. (96) Ap&SS 238, 285
$\Diamond$ Hanna M., Mayer P., Hanna Y. (98) Astrophys. Sp. Sc. 262, 171
$\Diamond$ Kallrath J., Milone E. F. (99) Eclipsing Binary Stars, Springer, New York

[15] $\mathcal{S}$ Harmanec P., Oláh K., Božić H., Hadrava P., Horn J., Koubský P., Kříž S., Minikunov N. H., Muminovič M., Percy J. R., Skcherbakov A. G., Stupar M., Tarasov A. E. 1986, IAU Coll. 92, 456-459: "o And, Photometry, polarimetry" In: "Physics of Be Stars", eds. A. Slettebak, T. P. Snow – Cambridge Univ. Press

◇ Stagg C.R. (88) MNRAS 234, 1021
⋄ Hill G.M. et al. (88) PASP 100, 243
⋄ Hill G.M. et al. (89) PASP 101, 258
◇ Jarad M.M., Hilditch R.W., Skillen I. (89) MNRAS 238, 1085
◇ Balona L.A. (91) ESO Conference and Workshop Proc. No. 36 Rapid Var. of OB Stars, Garching 249
◇ Fox G.K. (92) Astrophys. Sp. Sc. 187, 219
◇ Sareyan J.P., Gonzalez-Bedolla S., Chauville J., Morel P.J., Alvarez M. (92) A&A 257, 567
◇ Schoneich W., Zelwanowa E. (93) IAU Coll. 138, 327
◇ Fox G.K. (93) MNRAS 260, 513
◇ McDavid D. (94) PASP 106, 949
⋄ Štefl S. et al. (95) AA 294, 135
◇ Fox G.K. (95) MNRAS 441, 408
◇ Sareyan J.P. et al. (98) A&A 332, 155

[16] $\mathcal{S}$ Šíma Z., Hadrava P. 1987, Astrophys. Sp. Sc. 130, 151-156: "Mass Transfer and Line Profiles – WZ Sge"
◇ Hessman F.V., Mantel K.-H., Barwig H., Schoembs R. (92) A&A 263, 147

[17] $\mathcal{S}$ **Hadrava P. 1987, Astrophys. Sp. Sc. 138, 61-69: "The Roche Coordinates in Non-Synchronous Binaries"**
◇ Kopal Z. (89) The Roche Problem, Kluwer Academic Publishers
◇ Kallrath J., Milone E. F. (99) Eclipsing Binary Stars, Springer, New York

[18] $\mathcal{S}$ Hadrava P., Kadrnoška J. 1987, Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. No. 68, 43-45: "Efficiency of Various Methods of the Search for Periodic Orbits"

[19] $\mathcal{S}$ **Hadrava P. 1987, Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. No. 70, 263-266: "Model Atmospheres of Binary Components"**
◇ Pustylnik I. (95) Baltic Astronomy 4, 64-78
◇ Pustylnik I. (97) Astron. and Astrophys. Transactions 13, 309-316
◇ Kallrath J., Milone E. F. (99) Eclipsing Binary Stars, Springer, New York

[20] $\mathcal{S}$ Harmanec P., Hadrava P., Ružić Ž., Pavlovski K., Božić H., Horn J., Koubský P. 1988, IBVS No. 3263: "o And: Another Major Shell Phase Just Coming?"
◇ Percy J.R., Attard A. (92) PASP 104, 1160
◇ Sareyan J.P., Gonzalez-Bedolla S., Chauville J., Morel P.J., Alvarez M. (92) A&A 257, 567
◇ McDavid D. (99) Be Star Newsletter, 34

[21] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1988, Publ. des Astrophys. Obs. zu Potsdam Nr. 114, Band 33, Heft 2, 11-13: "Models of Atmospheres of Contact Binary-Components: Incompatibility of Hydrostatic and Radiative Equilibria"
◇ Kallrath J., Milone E. F. (99) Eclipsing Binary Stars, Springer, New York

[22] $\mathcal{R}$ Hadrava P., Zentsova A. S. 1988, BAC 39, 345-354: "Theoretical Emission Line Profiles in the Spectra of Active Galactic Nuclei"
⋄ Zentsova A.S. (90) AZh 67, 463
⋄ Zentsova A.S., Fedorenko N.V. (91) AZh 68, 14-21 (SA 35, 7 ?)
⋄ Zentsova A.S. (91) AZh 68, 652-656

[23] $\mathcal{S}$ Štefl S., Harmanec P., Horn J., Koubský P., Kříž S., Hadrava P., Božić H., Pavlovski K. 1989, Sp. Sc. Rev. 50, 365-366: "KX And: possibly a strongly interacting binary", reprinted in 'Algols', Ed. A.H.Batten, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London 1989.

[24] $\mathcal{S}$ Hadrava P., Harmanec P., Horn J., Koubský P., Kříž. S., Percy J. R., Božić H. 1989, IBVS No. 3386: "Be Variable 59 Cyg: Rapid Light Variations detected"

[25] $\mathcal{S}$ Štefl S., Harmanec P., Horn J., Koubský P., Kříž S., Hadrava P., Božić H., Pavlovski K. 1990, BAC 41, 29-44: "Properties and Nature of Be Stars 14: Is KX And a Strongly Interacting Binary?"
◇ Pols O.R., Coté J., Waters L.B.F.M., Heise J. (91) A&A 241, 419
◇ Floquet M., Hubert A.M. (91) The IR spectral region of stars, Montpellier Col. Oct. 1990, Ed. Jaschek and Andreillat, 160
◇ Percy J.R., Sen L. (91) IBVS 3670
◇ Percy J.R., Attard A. (92) PASP 104, 1160
⋄ Harmanec P. (92) A&A 266, 307
◇ Hubert A.M. (94) IAU Symp. 162, 341
◇ Floquet M, Hubert A.-M., Hubert H., Ballereau D., Chauville J. (95) A&A 294, 227
◇ Berdyugin A.V., Berdyugina S.V., Tarasov A.E. (98) Pisma AZh. 24, 367 = Astron. Letters 24, 309
◇ Tarasov A.E., Berdyugina S.V., Berdyugin A.V. (98) Pisma AZh. 24, 375 = Astron. Letters 24, 316
⋄ Božić H. (98) Hvar Obs.Bul. 22, 1

[26] $\mathcal{R}$ Zentsova A. S., Hadrava P. 1990, Astron. Zh. 67, 230-240: "Istechenie gaza iz yader aktivnykh galaktik i dinamika emissionnykh oblakov v nikh" (in Russian, English translation – Soviet Astr. 34, 117)

[27] $\mathcal{S}$ Hadrava P., Koubský P., Horn J. 1990, Be Star Newsletter No. 22, 20: "88 Herculis"

[28] $\mathcal{S}$ Kadrnoška J., Hadrava P. 1990, Cel. Mech. 48, 115-126: "Analytical Continuation of Stability of Periodic orbits in the Restricted Three-body Problem"

[29] $\mathcal{S}$ **Hadrava P. 1990, Contrib. Astron. Obs. Skal. Pl. 20, 23-25: "Eclipsing Binaries – Light-curve solution"**
◇ Harmanec P., Scholz G. (93) A&A 279, 131-147
◇ Skopal A. (94) A&A 286, 453-462
◇ Štefl S. et al. (95) A&A 294, 135-154
◇ Tarasov A.E. et al. (95) A&AS 110, 59-79
◇ Božić H. et al. (95) A&A 304, 235-257
◇ Štefl S., Balona L.A. (96) A&A 309, 787
◇ Scholz G. et al. (97) A&A 320, 791
◇ Raja T., Wolf M. (98) A&A 331, 550
◇ Harmanec P. (98) A&A 334, 558
◇ Bolton C.T. et al. (98) A&A 337, 183
◇ Harmanec P. (99) A&A 341, 867
◇ Hensberge H., Pavlovski K., Verschueren W. (00) A&A 358, 553

[30] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Hadrava P. 1991, Vesmír 70, 44-47: "Jan Kepler, Braniboři v Čechách a Nova Geminorum 1283"

[31] $\mathcal{S}$ Mayer P., Hadrava P., Harmanec P., Chochol D. 1991, BAC 42, 230-240: "New Data on the Eclipsing Binary V1765 Cyg (HR 7551) and Improved Orbital Light-Curve Solutions"
◇ Popper D. M. (93) PASP 105, 721-730
◇ Raja T. (94) A&A 284, 82
◇ Percy J.R., Khaja N. (95) Jour. RAS Can 89, 91-98
⋄ Lorenz R. et al (98) A&A 332, 909
⋄ Lorenz R. et al (99) A&A 345, 531

[32] $\mathcal{R}$ Bičák J., Semerák O., Hadrava P. 1991, MPA 596 (preprints of Max-Planck-Institut für astrophysik): "Could the Kerr geometry contribute to the collimation of cosmic jets?"
◇ Vokrouhlický D., Karas V. (91) A&A 252, 835
◇ de Felice F., Curir A. (92) CQG 9, 1303
⋄ Semerák O. (95) CS Jour. Phys. 45, 1-22

[33] $\mathcal{R}$ Bičák J., Semerák O., Hadrava P. 1992, "Could the Kerr geometry contribute to the collimation of cosmic jets?" In: "Proc. of Sixth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity", eds. H. Sato, T. Nakamura, World Scientific Publishing Co., Singapore, str. 674-677
⋄ Semerák O. (95) CS Jour. Phys. 45, 1-22

[34] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1992, A&A 256, 519-524: "Radiative transfer in rotating stars"

[35] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1992, A&A 257, 218: "Reflection with limb darkening"
◇ Skopal A. (94) A&A 286, 453-462
◇ Skopal A. (96) "Physical Processes in Interacting Binaries", p. 53
◇ Skopal A. (96) Aph. Sp. Sc. 238, 285
◇ Kallrath J., Milone E. F. (99) Eclipsing Binary Stars, Springer, New York

[36] $\mathcal{H}$ $\mathcal{R}$ $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1993, Acta Polytechnica 33, 29-32: "Doppler Principle in Astronomy" (In: Proc. of Doppler Conference)

[37] $\mathcal{R}$ Bičák J., Semerák O., Hadrava P. 1993, MNRAS 263, 545-559: "Collimation effects of the Kerr Field"
◇ Zakharov A. F. (93) MPA 755 = (94) MNRAS 269, 283
⋄ Semerák O. (93) GRG 25, 1041-1077
⋄ Semerák O. (95) CS Jour. Phys. 45, 1-22
◇ Zakharov A. F. (95) Ann NY Acad 759, 550
◇ Friedman J. L. (95) 'Relativistic astrophysics' in 'GR 14' ed. M. Francaviglia et al., p. 479, World Scientific, Singapore
⋄ Semerák O. (96) Astrophys. L. 33, 275
⋄ Semerák O. (96) Helv. phys. A 69, 69
◇ Karas V., Doviak M. (97) GRG 29, 1011
◇ de Felice F., Carlotto L. (97) ApJ 481, 116
⋄ Semerák O. (97) Ap&SS 250, 235
◇ Frolov V.P., Novikov I.D. (98) 'Black Hole Physics', Kluwer, Dordrecht
⋄ Semerák O. (99) MNRAS 308, 863
◇ de Araujo JCN, Wang AZ (00) GRG 32, 1971

[38] $\mathcal{R}$ Hadrava P., Bao G., Østgaard E. 1994, A&A 284, 693-698: "Radial-velocity curves of eccentric orbits in general relativity"

[39] $\mathcal{R}$ Bao G., Hadrava P., Østgaard E. 1994, ApJ 425, 63-71: "Multiple Images and Light Curves of an Emitting Source on a Relativistic Eccentric Orbit around a Black Hole"
⋄ Bao G., Østgaard E. (95) ApJ 443, 54
◇ Stuchlík Z. (96) "Physical Processes in Interacting Binaries", p. 93
⋄ Bao G., Abramowicz M.A. (96) ApJ 465, 646
◇ Hollywood J.M., Melia F. (97) ApJS 112, 423
◇ Karas V. (99) ApJ 526, 953
◇ Qingjuan Yu, Youjun Lu (00) MNRAS 311, 161

[40] $\mathcal{S}$ Horn J., Koubský P., Hadrava P., Juza K., Kříž S., Škoda P., Štefl S. 1994, A&AS 105, 119-124 (abstr. A&A 287, 1036): "The orbit of the spectroscopic binary ρ Aur"

[41] $\mathcal{S}$ Pavlovski K., Božić H., Ružić Ž., Harmanec P., Horn J., Koubský P., Juza K., Hadrava P., Kříž S., Štefl S., Žďárský F. 1994: "Photometric characteristics of the Be stars: Almost twenty years of UBV monitoring at the Hvar observatory" in IAU Symp. 162 'Pulsation, Rotation and Mass Loss in Early-Type Stars', Juan-Les-Pins, France, October 1993, Eds. L.A.Balona, H.Henrichs and J.M. LeContel, Kluver, Dordrecht, str. 301-302
◇ Bossi M., Nunez N.S., Guerrero G., Sareyan J.P., Alvarez M. (98) A&AS 127, 433

[42] $\mathcal{R}$ Bao G., Hadrava P., Østgaard E. 1994, ApJ 435, 55-65: "Emission Line Profiles from a Relativistic Accretion Disk and the Role of its Multiple Images"
◇ Karas V., Lanza A., Vokrouhlický D. (95) ApJ 440, 108-115
◇ Dambrowski M.P., Osarczuk J. (95) Astrophys. Sp. Sc. 229, 139
⋄ Bao G., Østgaard E. (95) ApJ 443, 54
◇ Karas V., Kraus P. (96) PASJ 48, 771
◇ Stuchlík Z. (96) "Physical Processes in Interacting Binaries", p. 93
◇ Fanton C., Calvani M., deFelice F., Cadez A. (97) PASJ 49, 159
⋄ Bao G., Wiita P.J. (97) ApJ 485, 136
◇ Hollywood J.M., Melia F. (97) ApJS 112, 423
◇ Ignace R. (98) A&A 332, 686
◇ Ignace R. (98) A&A 337, 819
⋄ Bao G., Wiita P.J. (99) ApJ 519, 80
◇ Qingjuan Yu, Youjun Lu (00) MNRAS 311, 161
◇ Dabrowski MP, Schunck FE (00) ApJ 535, 316
⋄ Xiong Y., Wiita P.J., Bao G. (00) PASJ 52, 1097

[43] $\mathcal{R}$ Hadrava P. 1995: "Reflection effect on a relativistic accretion disk", In: Proc. of 18th Stellar Conference, eds.: P. Hadrava, Z. Stuchlík and S. Hledík, Silesian University, Opava 1995, str. 11-13.

[44] $\mathcal{S}$ **Hadrava P. 1995, A&AS 114, 393-396: "Orbital elements of multiple spectroscopic stars"**
◇ Karas V., Kraus P. (96) PASJ 48, 771
◇ Holmgren D. E. (96) "Physical Processes in Interacting Binaries", p. 20
◇ Zverko J., Žižňovský J., Khokhlova V.L. (97) Contr. A.O. Skal.Pl. 27, 41-52
◇ Ljubimkov a kol. (97) AŽ 74, 710
◇ Lyubimkov L.S., Račkovskaja T.M., Rostopčin S.I., Tarasov A.E. (97) Astr. Rep. 41, 630
◇ Maxted P.F.L. (97) IAU Symp. 189, 119
◇ Raja T., Wolf M. (98) A&A 331, 550
◇ Lorenz R., Mayer P., Drechsel H. (98) A&A 332, 909
◇ Kubát J., Holmgren D., Rentzsch-Holm I. (98) A&A 332, 842
◇ Harmanec P. (98) A&A 334, 558
◇ Lyubimkov L.S., Račkovskaja T.M., Rostopčin S.I., Tarasov A.E. (98) Astr. Rep. 42, 312
◇ Tarasov A.E., Berdyugin A.V. (98) Astron. Rep. 42, 494
◇ Lorenz R., Mayer P., Drechsel H. (99) A&A 345, 531
◇ Kallrath J., Milone E. F. (99) Eclipsing Binary Stars, Springer, New York
◇ Hensberge H., Pavlovski K., Verschueren W. (00) A&A 358, 553

[45] $\mathcal{S}$ Horn J., Kubát J., Harmanec P., Koubský P., Hadrava P., Šimon V., Štefl S., Škoda P. 1996, A&A 309, 521-529: "Spectroscopic orbits of the triple star 55 Ursae Majoris"
◇ Trimble V., McFadden L.A. (97) PASP 109, 78
◇ Liu N. et al. (97) ApJ 485, 350

◇ Moujtahid A. et al. (98) A&AS 129, 289
⋄ Harmanec P. (98) A&A 334, 558
◇ Krtička J., Štefl V. (99) AAS 138, 47
◇ Iben I.Jr., Tutukov A.V. (99) ApJ 511, 324
◇ Petrova A.V., Orlov V.V. (99) AJ 117, 587
◇ Pribula T. et al. (99) A&A 345, 137
⋄ Richards M.T. et al. (00) ApJ 531, 1003
◇ Orlov V.V., Petrova A.V. (00) Astron Lett 26, 250

[46] $\mathcal{R}$ Bao G., Hadrava P., Østgaard E. 1996, ApJ 464, 684-689: "Line Profiles from Relativistic Eccentric Rings"
◇ Stuchlík Z. (96) "Physical Processes in Interacting Binaries", p. 93
◇ Ulrich M.-H., Maraschi L., Urry C. M. (97) Annu. Rev. Astron. & Astrophys. 35, 445-502

[47] $\mathcal{R}$ Bao G., Wiita P. J., Hadrava P. 1996, Phys. Rev. Lett. 77, 12-15: "Energy-dependent polarization variability as a black hole signature"
◇ Schewe P.F., Stein B. (96-21.6.) Physics News 276
⋄ Bao G., Wiita P. J. (97) ApJ. 485, 136
◇ Kroeger R.A. et al. (99) Nuclear Instr. & Methods in Phys. A. 436, 165
⋄ Xiong Y., Wiita P.J., Bao G. (00) PASJ 52, 1097

[48] $\mathcal{S}$ Harmanec P., Morand F., Bonneau D., Jiang Y., Yang S., Guinan E.F., Hall D.S., Mourard D., Hadrava P., Božić H., Sterken C., Tallon-Bosc I., Walker G.A.H., McCook G.P., Vakili F., Stee Ph., Le Contel J.M. 1996, A&A 312, 879-896: "Jet-like structures in β Lyr. Results of optical interferometry, spectroscopy and photometry"
◇ Hildebrandt G., Scholz G., Woche M. (97) AN 318, 291
⋄ Mourard D. et al. (97) A&A 317, 789
◇ Hoffman J.L., Nordsieck K.H., Fox G.K. (98) AJ 115, 1576
◇ Eritsian M.A. et al. (98) A&A 329, 1075
⋄ Linnell A.P. et al. (98) ApJ 509, 379
◇ Šimon V. (99) A&A 134, 1
⋄ Vakili F. et al. (98) A&A 335, 261
◇ Wilson R.E., van Hamme W. (99) MNRAS 303, 736
⋄ Berio P., Mourard D., Bonneau D. et al. (99) J Opt Soc Am A 16, 872
◇ Richards M.T. et al. (00) ApJ 531, 1003
◇ Burgin M.S., Chalabaev A. (00) A&AS 142, 325
◇ Umana G., Maxted PFL., Triglio C. et al. (00) A&A 358, 229
◇ Linnell AP. (00) MNRAS 319, 255

[49] $\mathcal{S}$ Hadrava P., Harmanec P. 1996, A&A 315, L401-404: "New aspects of the variability of β Cep"
⋄ Harmanec P. (98) A&A 334, 558
◇ Baade D. (99) IAU Symp. 185, 347
⋄ Harmanec P. (99) A&A 341, 867

[50] $\mathcal{S}$ Holmgren D. E., Harmanec P., Hadrava P., Koubský P., Kubát J. 1996: "A search for line profile variability in early-type binary systems." In: Physical Processes in Interacting Binaries, Eds. D. Chochol, A. Skopal and T. Pribula, AI Slov.Acad.Sci. and SAS, Tatranská Lomnica, Slovakia, str. 18-19

[51] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Hadrava P., Svobodová D., Shackelford J. R., 1996: "Tycho Brahe - Instruments of the renewed astronomy", Koniasch Latin Press, Praha (ISBN 80-85917-26-2)
◇ O. Gingerich ? (99) JHA 30, 89

[52] $\mathcal{R}$ Bao G., Wiita P.J., Hadrava P. 1996: "Frequency Dependent Polarization Variability of AGN" in proc. of international workshop "Blazar Continuum Variability" eds. H.R. Miller, J.R. Webb and J.C. Noble, ASP Conference Series, v.110, str. 150-155

[53] $\mathcal{R}$ Østgaard E., Bao G., Hadrava P. 1997: "Line Profiles Radiated by Orbiting Matter Around Black Holes" in proc. of IAU Coll. 159 "Emission Lines in Active Galaxies: New Methods and Techniques" eds. B.M.Peterson, F.-Z.Cheng and A.S. Wilson, ASP Conference Series, vol. 113, str. 205-206

[54] $\mathcal{S}$ Harmanec P., Hadrava P., Yang S., Holmgren D., North P., Koubský P., Kubát J., Poretti E. 1997, A&A 319, 867-880: "Search for forced oscillations in binaries I. The eclipsing and spectroscopic binary V436 Persei ≡ 1 Persei"

⋄ Holmgren D. E. (96) "Physical Processes in Interacting Binaries", p. 20

◇ Aerts C., De Mey K., De Cat P., Waelkens C. (97) Proc. of the Los Alamos Meeting A half century of stellar pulsation interpretations - a tribute to Arthur N. Cox, Los Alamos, June 1997

⋄ Harmanec P. (98) A&A 334, 558

◇ Molenberghs G., Aerts C., deCat P. (99) AAS 135, 383

◇ deCat P., Aerts C., de Ridder J. (00) A&A 355, 1015

[55] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1997, A&AS 122, 581-584: "Relative line photometry of eclipsing binaries"

◇ Hensberge H., Pavlovski K., Verschueren W. (00) A&A 358, 553

[56] $\mathcal{R}$ Hadrava P., Bao G., Østgaard E. 1997, ApJ 480, 324-328: "Energy Extraction from a Relativistic Accretion Disk by Reflection Effect."

◇ Trimble V., McFadden L.-A. (98) PASP 110, 223

[57] $\mathcal{S}$ Holmgren D., Hadrava P., Harmanec P., Koubský P., Kubát J. 1997, A&A 322, 565-575: "Search for forced oscillations in binaries II. β Scorpii A. New physical parameters and a search for line profile variability"

◇ Howk J.C., Savage B.D. (99) ApJ 517, 746

◇ Molenberghs G., Aerts C., deCat P. (99) AAS 135,383

[58] $\mathcal{S}$ Hill G., Harmanec P., Pavlovski K., Božić H., Hadrava P., Koubský P., Žižňovský J. 1997, A&A 324, 965-976: "Properties and nature of Be stars 17. V360 Lac=HD 216200 is a B3e+F9IV: binary"

⋄ Božić H. (98) Hvar Obs.Bul. 22, 1

⋄ Harmanec P. et al. (99) A&A 346, 87

◇ Le Coupanec P. et al. (99) A&A 347, 669

[59] $\mathcal{R}$ Bao G., Hadrava P., Wiita P. J., Xiong Y. 1997, ApJ 487, 142-152: "Polarization variability of active galactic nuclei and X-ray binaries"

⋄ Xiong Y., Wiita P.J., Bao G. (00) PASJ 52, 1097

[60] $\mathcal{S}$ Pavlovski K., Harmanec P., Božić H., Koubský P., Hadrava P., Kříž S., Ružić Ž., Štefl S. 1997, A&AS 125, 75-98: "UBV photometry of Be stars at Hvar: 1972 - 1990"

◇ Percy J.R. et al. (97) PASP 109, 1215

◇ Fabregat J., Adelman S.J. (98) A&A 329, 579

⋄ Božić H., Harmanec P. (98) A&A 330, 222

⋄ Božić H. (98) Hvar Obs.Bul. 22, 1

◇ Hubert A.M., Floquet M. (98) A&A 335, 565

◇ Moujtahid A., Zorec J., Hubert A.M., Garcia A., Burki G. (98) A&AS 129, 289

⋄ Percy J.R. et al. (99) A&A 348, 553

⋄ Božić H. , Ruždjak D., Sudar D. (99) A&A 350, 566

⋄ Koubský P. et al. (00) A&A 356, 913

◇ Fabregat J. , Terrejón J.M. (00) A&A 357, 451

◇ Jetsu L., Hackman T., Hall D.S. et al. (00) A&A 362, 223
◇ Floquet M., Hubert A.M., Hirata R. et al. (00) A&A 362, 1020

[61] $\mathcal{S}$ Koubský P., Harmanec P., Kubát J., Hubert A.-M., Božić H., Floquet M., Hadrava P., Hill G., Percy J.R. 1997, A&A 328, 551-564: "Properties and nature of Be stars 18. Spectral, light and colour variations of 4 Herculis"
⋄ Hubert A.-M., Floquet M. (98) A&A 335, 565
◇ Clark J.S., Steele I.A., Fender R.P. (98) MNRAS 299, 1119
◇ Rivinius Th, Štefl S., Baade D. (99) A&A 348, 831
⋄ Harmanec P. (99) A&A 341, 867
⋄ Koubský P. et al. (00) A&A 356, 913
⋄ Floquet M. et al. (00) A&A 362, 1020

[62] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Hadrava P. 1997, Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, New series Vol. 1, 79-89: "Tycho Brahe and Prague" (proc. of conference 'Science and technology in Rudolphinian time')

[63] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Hadrava P. 1997, Listy filologické 120 (1/2), 60-78: "Latinská terminologie Křišťanova spisu o astrolábu"
◇ Nechutová J. (00) Latinská literatura českého středověku, Vyšehrad, Praha

[64] $\mathcal{S}$ Harmanec P., Pavlovski K., Božić H., Koubský P., Hadrava P., Kříž S., Ružić Ž., Štefl S. 1997, Journal of Astronomical Data No. 3: "UBV photometry of Be stars at Hvar: The data archives 1972 - 1990"
⋄ Harmanec P. et al. (99) A&A 346, 87
⋄ Percy J.R. et al. (99) A&A 348, 553
⋄ Božić H. , Ruždjak D., Sudar D. (99) A&A 350, 566

[65] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Hadrava P. 1998: Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, New series Vol. 2, 225-233: "Cosmological theories at the time of Tycho Brahe" (proc. of symposium 'Mysterium cosmographicum')

[66] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1998: "Fourier disentangling and light curve solution for multiple stars" in Proc. of the 29th conference on variable star research, J. Dušek, M. Zejda eds., HaP MK, Brno, str. 111-113

[67] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 1998, Hvar obs. bull. 22, 75-82: "Modern methods of the solution of light-curves of eclipsing binaries"

[68] $\mathcal{S}$ Koubský P., Harmanec P., Božić H., Percy J. R., Žižňovský J., Huang L., Richards M. T., Hadrava P., Šimon V. 1998, Hvar obs. bull. 22, 17-36: "Spectroscopy and photometry of the interacting binary CX Draconis – evidence for circumstellar matter"

[69] $\mathcal{R}$ Bao G., Wiita P. J., Hadrava P. 1998, ApJ 504, 58-63: "General relativistic effects on the spectrum reflected by accretion disks around black holes"
⋄ Bao G., Wiita P.J. (99) ApJ 519, 80
◇ Martocchia A., Karas V., Matt G. (00) MNRAS 312, 817
⋄ Xiong Y., Wiita P.J., Bao G. (00) PASJ 52, 1097

[70] $\mathcal{S}$ Kubát J., Koubský P., Harmanec P., Hubert A.-M., Hadrava P. 1998: "Wind and jets in the Be star 4 Herculis" in proc. of ESO Workshop "Cyclical variability in stellar winds", L. Kaper, A.W.Fullerton (Eds.)

[71] $\mathcal{R}$ Řezáč R., Hadrava P. 1998: "Relativistic kinetic model of a multi-particle cloud" in "WDS '98", J. Šafránková (ed.), Matfyzpress Praha, str. 359-365

[72] $\mathcal{S}$ Holmgren D., Hadrava P., Harmanec P., Eenens P., Corral L. J., Yang S., Ak H., Božić H. 1999, A&A 345, 855: "Search for forced oscillations in binaries III. Improved elements and the detection of line-profile variability of a B4V + A6V system AR Cas"

[73] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Hadrava P. 1999, Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, New series Vol. 3, 287-294: "Magister Cristannus de Prachaticz and his astronomical work"

[74] $\mathcal{S}$ Bisikalo D.V., Harmanec P., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A., Hadrava P. 2000, A&A 353, 1009-1015: "Circumstellar structures in the eclipsing binary β Lyr A – Gasdynamical modelling confronted with observations"
◇ Linnell A.P. (00) MNRAS 319, 255
◇ Gurzadyan G.A. (00) ApSpSc 274, 785

[75] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Hadrava P. 2000: "Na okraj několika astronomických rukopisů" (On the margin of several astronomical manuscripts), In: "Septuaginta Paulo Spunar oblata (70+2)". Ed. J.K.Kroupa, Praha, KLP (ISBN 80-85917-74-2), str. 329-333
◇ Nechutová J. (00) Latinská literatura českého středověku, Vyšehrad, Praha

[76] $\mathcal{S}$ Bisikalo D. V., Boyarchuk A. A., Harmanec P., Hadrava P., Kuznetsov O.A. 2000: "Gas-Dynamical Modelling of Circumstellar Matter in β Lyr A" In: IAU Coll. 175 "The Be-phenomenon in early type stars" (Eds. M.A. Smith, H.F. Henrichs, J. Fabregat - Proc. Alicante 1999) ASP Conference Series, Vol. 214, str. 697-700

[77] $\mathcal{S}$ Harmanec P., Habuda P., Štefl S., Hadrava P., Korčáková D., Koubský P., Krtička J., Kubát J., Škoda P., Šlechta M., Wolf M. 2000, A&A Letters 364, L85-L88: "Properties and nature of Be stars, XX Binary nature and orbital elements of γ Cas"

[78] $\mathcal{H}$ Hadravová A., Černá A., Homolková M., Hadrava P. 2000, Listy filologické 123 (1/2), 40-51: "Replika M. Křišťana z Prachatic k proroctví M. Jana Pařížského." (The reply of M. Cristannus of Prachatice to the prophecy of M. Johannes Parisiensis)

[79] $\mathcal{S}$ Hadrava P. 2001: "The method of spectra disentangling and its links to Doppler tomography" in press in: "Proc. of astrotomography workshop", ed. H. Boffin, Brusel

Elektronické publikace:

[E1] $\mathcal{S}$ Hadrava P. (FTP: sunstel.asu.cas.cz): "FOTEL – User's guide"
◇ Sobotka M. (89) Solar. Phys. 124, 37
◇ Komžík R., Hric L., Grygar J. (92) A&Sp.Sc. 198, 149-159
◇ Štefl S., Baade D., Harmanec P., Balona L.A. (95) A&A 294, 135-154
◇ Tarasov A.E. et al. (95) A&AS 110, 59-79
◇ Lyubimkov L.S., Račkovskaja T.M., Rostopčin S.I., Tarasov A.E. (95) Astr. Zhur. 72, 212
◇ Božić H. et al. (95) A&A 304, 235-257
◇ Lyubimkov L.S., Račkovskaja T.M., Rostopčin S.I., Tarasov A.E. (96) Astr. Zhur. 73, 55
◇ Štefl S., Balona L.A. (96) A&A 309, 787
◇ Scholz G., Lehmann H., Harmanec P., Gerth E., Hildebrandt G. (97) A&A 320, 791
◇ Tarasov A.E., Berdyugina S.V., Berdyugin A.V. (98) Astron. Lett. 24, 316
◇ Harmanec P., (98) A&A 334, 558
◇ Berdyugina S.V., Jankov S., Ilyin I., Tuominen I., Fekel F.C. (98) A&A 334, 863
◇ Harmanec P. (99) A&A 341, 867
◇ Berdyugina S.V.,Ilyin I., Tuominen I. (99) A&A 347, 932
◇ Kallrath J., Milone E. F. (99) Eclipsing Binary Stars, Springer, New York

[E2] $\mathcal{S}$ Hadrava P. (http://sunkl.asu.cas.cz/˜had/korel.html): "KOREL – User's guide"
◇ Zverko J., Žižňovský J., Khokhlova V.L. (97) Contr A.O. Skal.Pl. 27, 41-52
◇ Hensberge H., Pavlovski K., Verschueren W. (00) A&A 358, 553

[E3] Hadrava P. (http://sunkl.asu.cas.cz/~had/kf.html): "Selected chapters from cosmic plasma-physics" (in Czech)

[E4] $\mathcal{R}$ Hadrava P. (http://sunkl.asu.cas.cz/~had/gr.html): "Lecture notes on general relativity"

[E5] $\mathcal{S}$ Hadrava P. (http://sunkl.asu.cas.cz/~had/stat.html): "Lecture notes on stellar atmospheres"

[E6] $\mathcal{R}$ Hadrava P. (http://sunkl.asu.cas.cz/~had/cosm.html): "Lecture notes on cosmology"

[E7] $\mathcal{S}$ **Hadrava P. (http://sunkl.asu.cas.cz/~had/2m.html): "Algoritmy k řízení 2m-dalekohledu"**

Část II

Texty vybraných prací

234 Vol. 34 (1983), No. 4

A SIMPLE KINETIC MODEL OF A MULTI- PARTICLE CLOUD

P. Hadrava

Astronomical Institute, Czechoslovak Academy of Sciences, 251 65 Ondřejov, Czechoslovakia

Received 2 February 1982

ПРОСТАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЧАСТИЧНОГО ОБЛАКА

В работе предложен простой метод моделирования облака частиц. Этод метод, основанный на предположении о гаусовской форме функции распределения, позволяет изучать форму, градиенты скорости и тензор напряжения облака. В числе примеров полученны два аналитических решения. Первое, соответствующее группам движения, показывает сосредоточение звезд галактическим потенциалом. Второе, моделирующее вязкое газовое кольцо, приводит в предельных случаях оптически толстой или тонкой среды к разным формам расширения (толстое кольцо или плоский диск соответственно) и к разным частотам колебаний,

A simple method for modelling the evolution of a cloud of particles is given. This method, based on the assumption of a Gaussian distribution function, enables us to treat the shape, velocity gradient and the stress tensor of the cloud. Two analytical solutions are given as examples. The first one, corresponding to moving groups of stars, shows focusing by galactic potential. The second one, appropriate to viscous gaseous discs (for example around a binary component), leads to a different form of expansion (a thick ring or flat disc) and to oscillation frequencies within the limits of an optically thick or thin ring, respectively.

1. Introduction

One-particle trajectory calculations give relatively good information about the velocity distribution in some gas dynamics problems, which should be treated exactly as the motion of a continuous medium (e.g. mass transfer in binaries). To obtain an estimate of the density and temperature distribution and/or to involve the correction for interaction of particles, many particle or hydrodynamical calculations are usually used (e.g. Lin and Pringle, 1976; Flannery, 1975), both of which are numerically very pretentious. However, when interactions between particles in a small volume are the only important ones, their phase trajectories can be taken as a small perturbation of some central one and the change of the particle distribution in phase space can be expressed by means of the divergence of their trajectories. This enables us to include a rough modelling of the internal structure of a cloudlet into one particle calculation of the motion of its centre. Such a model can be used for numerical calculations of the evolution of a gaseous cloud, as well as of a stellar cluster.

2. Cloud of Non-Interacting Particles

Consider a system of non-interacting particles, the motion of each is described by the canonical equations

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1}$$

If these equations are expressed as

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_K = \dot{\xi}_K(\xi, t) \tag{2}$$

in a general coordinate system $\{\xi_K = \xi_K(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})\}$ in phase space, the Boltzmann equation for one-particle distribution function $F(\xi, t)$ reads

$$\frac{\partial}{\partial t}F(\xi, t) + \dot{\xi}_K \frac{\partial}{\partial \xi_K}F(\xi, t) = 0. \tag{3}$$

Bull. Astron. Inst. Czechosl. **34** (1983), 234—241.

Vol. 34 (1983), No. 4 235

We can deduce, by partial differentation $\nabla^{[A]}$, (using the multi-index notation – see Appendix) that

(4) $$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^{[A]}F + \sum_{[0]\leq[B]\leq[A]}\binom{[A]}{[B]}\nabla^{[B]}\dot{\xi}_K\,\nabla^{[A]-[B]+[K]}F = 0\,.$$

If equation

(5) $$F(\xi, t) = \sum_{(A)}\frac{1}{[A]!}\left[\nabla^{[A]}F\right]_o(\xi - \xi_o(t))^{[A]}$$

is Taylor's expansion in ξ at points of a trajectory

(6) $$\xi_o = \xi_o(t)$$

in the phase space (the subscript "$_o$" denotes values at these points), the change of coefficients $\left[\nabla^{[A]}F\right]_o$ in equation (5) along the trajectory (6) is then given by the equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\nabla^{[A]}F\right]_o = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_{oK}\left[\nabla^{[A]+[K]}F\right]_o \sum_{[0]\leq[B]\leq[A]}\binom{[A]}{[B]}\left[\nabla^{[B]}\dot{\xi}_K\right]_o\left[\nabla^{[A]-[B]+[K]}F\right]_o\,.$$

This reduces to

(7) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\nabla^{[A]}F\right]_o = -\sum_{[0]<[B]\leq[A]}\binom{[A]}{[B]}\left[\nabla^{[B]}\dot{\xi}_K\right]_o\left[\nabla^{[A]-[B]+[K]}F\right]_o\,,$$

if (6) is the solution of (2). By integrating this system of equations along (6), we can obtain information about the changes of the distribution function in the neighbourhood of the phase trajectory (6). In particular,

(8) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{F}]_o = 0 \quad \text{for} \quad [A] = [0]\,,$$

(9) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial F}{\partial \xi_I}\right]_o = -\left[\frac{\partial \dot{\xi}_K}{\partial \xi_K}\right]_o\left[\frac{\partial F}{\partial \xi_K}\right]_o \quad \text{for} \quad [A] = [I]$$

and

(10) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_I\,\partial \xi_J}\right]_o = -\left[\frac{\partial \dot{\xi}_K}{\partial \xi_I}\right]_o\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_K\,\partial \xi_J}\right]_o - \left[\frac{\partial \dot{\xi}_K}{\partial \xi_J}\right]_o\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_K\,\partial \xi_I}\right]_o - \left[\frac{\partial^2 \dot{\xi}_K}{\partial \xi_I\,\partial \xi_J}\right]_o\left[\frac{\partial F}{\partial \xi_K}\right]_o \quad \text{for} \quad [A] = [I] + [J]\,.$$

If ξ_o is chosen at a local maximum of F at any initial time, this maximum moves along the trajectory (6), as follows from equation (9). Let the particles form a spatially restricted cloud with a nearly Gaussian distribution of density and Maxwellian distribution of impulse,

(11) $$F(\xi, t) = F_o \exp\left[-(\xi_I - \xi_{oI}(t))\,\mathsf{A}_{IJ}(t)\,(\xi_J - \xi_{oJ}(t))\right]$$

(ξ is assumed to be linear in $\boldsymbol{p}$). The equation for the matrix A_{IJ} then follows from (10) as

(12) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{A}_{IJ}(t) = -\mathsf{C}^K_I\mathsf{A}_{KJ} - \mathsf{A}_{IK}\mathsf{C}^K_J\,,$$

where the matrix

(13) $$\mathsf{C}^K_I = \left[\frac{\partial \dot{\xi}_K}{\partial \xi_I}\right]_o$$

is given along the path of the cloud centre by explicit form of equation (2) (i.e. by the Hamiltonian). By integrating equation (12) together with (2), we can obtain approximate information about the distribution function, i.e. about the shape, velocity gradient and the stress tensor of the cloud. Moreover, matrix $\mathbf{C}$ can be used for the second-order numerical integration of equation (2). For example, if

(14) $$\xi - \xi_o = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix},$$

236 Vol. 34 (1983), No. 4

the number density of the particles

$$n = \langle 1 \rangle = F_o \det^{-1/2} \left(\frac{\mathbf{a}}{\pi}\right) \exp\left[-x^{\mathrm{T}}(\mathbf{c} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b})x\right] = F_o \det^{1/2}(\pi\mathfrak{a}) \exp\left[-x^{\mathrm{T}}\mathfrak{c}x\right], \tag{15}$$

the impulse density

$$\boldsymbol{p} = \langle p \rangle = -\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}xn = -\mathfrak{b}xn \tag{16}$$

and the stress tensor

$$\tau = \frac{1}{m}\left\langle\left(p - \frac{\boldsymbol{p}}{n}\right) \otimes \left(p - \frac{\boldsymbol{p}}{n}\right)\right\rangle = \frac{n}{2m}\mathbf{a}^{-1} = \frac{n}{2m}\mathfrak{a}, \tag{17}$$

where

$$\mathfrak{a} = \mathbf{a}^{-1}, \quad \mathfrak{b} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathfrak{c} = \mathbf{c} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}, \tag{18a}$$

m is the mass of one particle. For numerical applications it may be useful to supersede (12) by an equation expressed directly in terms of the submatrices $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathfrak{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathfrak{b} & -\mathfrak{a} \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathbf{0} \\ \mathfrak{b} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathfrak{b} & -\mathfrak{a} \end{pmatrix}\right\} + \left\{\begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathbf{0} \\ \mathfrak{b} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathfrak{b} & -\mathfrak{a} \end{pmatrix}\right\}^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

However, straightforward finite-difference numerical integration of this equation, as well as that of equation (18), can lead to the violation of the positive definiteness of matrix $\mathbf{A}$. Thus it is better to use the formal solution

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{A}(0)\,\mathbf{B}(t) \tag{19}$$

of equation (12), where

$$\mathbf{B}(t) = \exp\left[-\int_0^t \mathbf{C}(t')\,dt'\right] \tag{20}$$

is the matrix, for which

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B} = -\mathbf{BC}, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{1}. \tag{21}$$

If we define

$$\|\mathbf{A}\| = \min_{|\xi|=1} \xi^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\xi, \quad |\xi|^2 = \xi^{\mathrm{T}}\xi, \tag{22}$$

which is positive just for positively definite matrices $\mathbf{A}$, then

$$\|\mathbf{A}(t)\| = \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(0)\,\mathbf{B}\xi}{\xi^{\mathrm{T}}\xi} \geqq \|\mathbf{A}(0)\| \,.\, \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\xi}{\xi^{\mathrm{T}}\xi} = \|\mathbf{A}(0)\| \,.\, |\mathbf{B}|^2. \tag{23}$$

Hence $\mathbf{A}(t)$ remain positively definite if $\mathbf{A}(0)$ is positively definite, and

$$|\mathbf{B}| = \min_{|\xi|=1} |\mathbf{B}\xi| \neq 0. \tag{24}$$

When matrix $\mathbf{C}$ is constant along the path, matrix $\mathbf{B}$ can be evaluated by means of Jordan's decomposition

$$\mathbf{B} = \exp(-\mathbf{C}t) = \sum_i e^{-c_i t} \sum_{l=1}^{k_i} \sum_{j=l}^{k_i} \frac{(-t)^{j-l}}{(j-l)!}\, \boldsymbol{c}_{il} \otimes \boldsymbol{c}_{ij}^*, \tag{25}$$

where $\boldsymbol{c}_{il}$ $(l = 2, \ldots, k_i)$ is a vector associated with the eigenvector $\boldsymbol{c}_{i1}$ corresponding to the eigenvalue c_i of matrix $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}\boldsymbol{c}_{il} = c_i\boldsymbol{c}_{il} + \boldsymbol{c}_{il-1}, \tag{26}$$

$\boldsymbol{c}_{il}^*$ is the vector dual to $\boldsymbol{c}_{il}$. An approximate numerical integration

$$\mathbf{B}(t + \Delta t) \cong \mathbf{B}(t) \exp\left[-\mathbf{C}(t)\,\Delta t\right] \cong \mathbf{B}(t)\,.\left[\mathbf{1} - \mathbf{C}(t)\,\Delta t\right] \tag{27}$$

of equation (21) can be used if $\mathbf{C}$ depends on t. The form of matrix $\mathbf{C}$, as well as its spectrum of eigenvalues

$\{c_i\}$ depend on the coordinate system $\{\xi\}$ used. The accuracy of approximation (27) is thus dependent on the choice of the coordinate system.

As an example let us treat the motion of a cloud in a circular orbit in an axially symmetrical potential, i.e. with the Hamiltonian

(28) $$H = \tfrac{1}{2}(p_r^2 + r^{-2}p_\varphi^2 + p_z^2) + \Phi(r, z)\,.$$

Then

(29) $$\mathbf{C} = \frac{\partial(\dot r, \dot\varphi, \dot z, \dot p_r, \dot p_\varphi, \dot p_z)}{\partial(r, \varphi, z, p_r, p_\varphi, p_z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\chi & 0 & 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where

(30) $$\chi = 2r^{-3/2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]^{1/2}, \quad \omega = r^{3/2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right]^{1/2}, \quad \psi = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]^{1/2},$$

and

(31) $$\exp(-\mathbf{C}t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega}\sin\omega t & \frac{\chi}{\omega^2}(1-\cos\omega t) & 0 \\ \frac{\chi}{\omega}\sin\omega t & 1 & 0 & -\frac{\chi}{\omega^2}(1-\cos\omega t) & t\left(\frac{\chi^2}{\omega^2} - r^{-2}\right) - \frac{\chi^2}{\omega^3}\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega t & 0 & 0 & -\frac{1}{\psi}\sin\psi t \\ \omega\sin\omega t & 0 & 0 & \cos\omega t & -\frac{\chi}{\omega}\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \psi\sin\psi t & 0 & 0 & \cos\psi t \end{pmatrix}$$

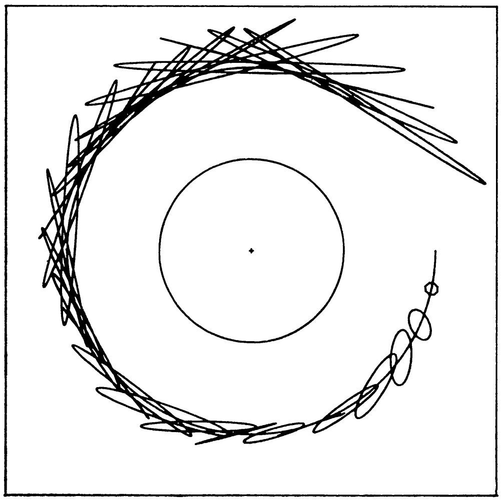


Fig. 1. The evolution of the shape of a cloud moving in a circular orbit ($r = 2$) assuming potential $\Phi = -[1 + (1 + r^2)^{1/2}]^{-1}$. The position of the cloud is plotted with respect to coordinates corotating with the circular orbit $r = 1$.

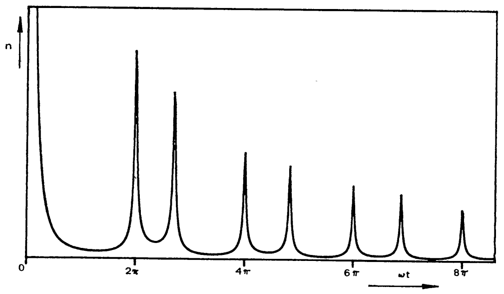


Fig. 2. Changes of surface density of the cloud as in Fig. 1.

238 Vol. 34 (1983), No. 4

When the initial condition on $\mathbf{A}$ is chosen to be

(32) $$\mathbf{A}(0) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x^2}, \frac{r^2}{x^2}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{v^2}, \frac{1}{r^2v^2}, \frac{1}{v^2}\right),$$

we obtain oscillations with the period $1/(2\psi)$ in the z-direction and oscillations combined with an elongation in the (r, φ)-plane (see Fig. 1). The surface density in this plane generates dumped oscillations, which are described by

(33) $$n \sim |(\chi^2 r^2 - \omega^2)\,\omega t \sin \omega t - 2\chi^2 r^2(1 - \cos \omega t)|^{-1}$$

for $x \to 0$ (see Fig. 2). Such a model can describe the evolution of stellar systems such as moving groups (Eggen, 1970). The density peaks in Fig. 2 and the corresponding abscissa-like shape of the cloud in Fig. 1 show the focusing of the group in galactic potential (Yuan, 1977).

3. Self-Gravitating Cloud

The potential of self-gravitation φ has to be added to the Hamiltonian in equation (1) for denser clouds (e.g. for star clusters). This potential is given by

(34) $$\varphi(x') = -\int \frac{\varrho}{|x - x'|}\, d^3x\,, \quad \text{where} \quad \varrho = \varrho(x^{\mathrm{T}} c x)\,,$$

[see equation (15)] in Cartesian coordinates x comoving with the cloud centre. Thus the second-order partial derivatives of φ, which implicitely depend on the solution of equation (12), should be added to equation (13). To evaluate them as a function of c, let us choose coordinates $\{x\}$ in which c is diagonal

(35) $$c = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)\,.$$

Then

(36) $$\left[\frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial x_3'^2}\right]_{x'=0} = -\int \frac{x_3}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \varrho(x)\, d^3x = \frac{2c_3\, \varrho(0)}{\sqrt{(c_1 c_2)}} \int_0^\pi f\left(1 - \frac{c_3}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) - \frac{c_3}{2}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\cos\lambda\right) d\lambda\,,$$

where

(37) $$f(x) = \begin{cases} x^{-3/2} \ln \left|\dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right| - \dfrac{2}{x} & \text{for } x > 0 \\ \dfrac{2}{3} & \text{for } x = 0\,. \\ -2(-x)^{-3/2} \arcsin \sqrt{\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)} - \dfrac{2}{x} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

The second-order derivatives with respect to x_1 and x_2 can be obtained by a cyclic permutation of (36) and the mixing derivatives are zero. Moreover, Poisson's equation

(38) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 4\pi\varrho$$

can be used to avoid the calculation of one of three integrals (36). Finally, the second derivatives of φ are to be expressed in terms of coordinates ξ used in equation (13)

(39) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}\right].$$

4. Collisions in the Cloud

It is important to include collisions of particles for gas dynamics applications of this kinetic model. This can be done, in principle, by putting the collisional term on the r.h.s. of the Boltzmann equation (3), i.e.

(40) $$\frac{\partial}{\partial t} F(\xi, t) + \dot{\xi}_K \frac{\partial}{\partial \xi_K} F(\xi, t) = \left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_c.$$

Vol. 34 (1983), No. 4 239

This leads to an additional term in equation (7)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\nabla^{[A]}F]_o = \left[\nabla^{[A]}\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_c\right]_o - \sum_{[0]<[B]\leq[A]}\binom{[A]}{[B]}[\nabla^{[B]}\xi_K]_o\,[\nabla^{[A]-[B]+[K]}F]_o \,. \tag{41}$$

The collisional term $(\delta F/\delta t)_c$ is generally an integral functional of F, whose explicite form depends on the type of collision involved. However, for the purpose of this calculations. it is sufficient to accept the diffusion approximation

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_c = \frac{1}{\tau}(F^e - F)\,. \tag{42}$$

where τ is the relaxation time and F^e is the equilibrium distribution function, i.e. the Maxwellian function given by (11) where F_o^e and $\mathsf{A}_{IJ}^e(t)$ have been substituted for F_0 and $\mathsf{A}_{IJ}(t)$, respectively. This distribution must yield the same distribution of density, velocity and energy, and its stress tensor must be isotropical. Following equations (15) to (17) we obtain

$$\mathfrak{a}^e = \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}(\mathfrak{a})\,.\,\mathbf{1} \quad \text{or} \quad \mathbf{a}^e = \frac{3}{\mathrm{Sp}(\mathbf{a}^{-1})}\mathbf{1}\,, \tag{43}$$

$$\mathfrak{b}^e = \mathfrak{b} \quad \text{or} \quad \mathbf{b}^e = \mathbf{a}^e\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}\,, \tag{44}$$

$$\mathfrak{c}^e = \mathfrak{c} \quad \text{or} \quad \mathbf{c}^e = \mathbf{c} + \mathbf{b}^T(\mathbf{a}^e\mathbf{a}^{-1} - \mathbf{1})\,\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}\,, \tag{45}$$

$$F_o^e = F_o \det{}^{1/2}\left(\frac{3\mathfrak{a}}{\mathrm{Sp}\,(\mathfrak{a})}\right) = F_o \det{}^{-1/2}\left(\tfrac{1}{3}\mathbf{a}\,\mathrm{Sp}(\mathbf{a}^{-1})\right). \tag{46}$$

Hence, the set of equations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_o = \frac{1}{\tau}(F_o^e - F_o) \tag{47}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{A}_{IJ} = \frac{1}{\tau}\frac{F^e}{F_o}(\mathsf{A}_{IJ}^e - \mathsf{A}_{IJ}) - \mathsf{C}_I^K\mathsf{A}_{KJ} - \mathsf{A}_{IK}\mathsf{C}_J^K \tag{48}$$

is to be integrated along (6). However, to avoid the tedious calculation of $\mathbf{A}^e$, it is advantageous to use, in analogy with (18), the equations for $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ instead of (48). Accordingly

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{a} = \left(\frac{\delta\mathfrak{a}}{\delta t}\right)_c + \mathfrak{b}\delta\mathfrak{a} + \alpha\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\delta^T\mathfrak{b}^T + \mathfrak{a}\alpha^T \tag{49}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{b} - \beta - \mathfrak{b}\gamma + \mathfrak{b}\delta\mathfrak{b} - \mathfrak{a}\delta^T\mathfrak{c} \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\delta\mathfrak{b} - \mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{b}^T\delta^T\mathfrak{c} - \gamma^T\mathfrak{c}\,, \tag{51}$$

where

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}. \tag{52}$$

The collisional term $(\delta\mathfrak{a}/\delta t)_c$ resulting from (42) can be simplified to

$$\left(\frac{\delta\mathfrak{a}}{\delta t}\right)_c = \frac{1}{\tau}\frac{F_o^e}{F_o}\left(\mathbf{1} - \frac{3\mathfrak{a}}{\mathrm{Sp}(\mathfrak{a})}\right)\mathfrak{a} \cong \frac{1}{\tau}\left(\frac{\mathrm{Sp}\,(\mathfrak{a})}{3}\mathbf{1} - \mathfrak{a}\right), \tag{53}$$

or replaced by another expression including, e.g., radiative losses of energy.

For instance, let us consider a circular gaseous ring described in cylindrical coordinates $\xi = (r, z, p_r, p_\varphi, p_z)$ by matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix}\mathfrak{c} & \mathfrak{b}^T\\ \mathfrak{b} & \mathfrak{a}\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} X & 0 & R & S & 0\\ 0 & Z & 0 & 0 & T\\ \hline R & 0 & V+U & Y & 0\\ S & 0 & Y & V-U-W & 0\\ 0 & T & 0 & 0 & V+W\end{array}\right) \tag{54}$$

(coordinate φ is omitted because of suspected symmetry of the ring). Assuming the Newtonian potential $\Phi = -(r^2 + z^2)^{-1/2}$ and the radius of the ring to be the unit of length (consequently the orbital period is 2π unit of time), (29) and (30) yield

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{55}$$

and (49) to (53)

$$\begin{aligned} \dot{R} &= 1 + 2S + R^2 - VX - U \\ \dot{S} &= RS - YX \\ \dot{T} &= 1 - ZV + T^2 - ZW \\ \dot{U} &= -U/\tau + \tfrac{2}{3}(4Y - SY + 2RV - TV + 2RU - TW) \\ \dot{V} &= \tfrac{2}{3}(2Y + SY + RV + TV + RU + TW) \\ \dot{W} &= -W/\tau + \tfrac{2}{3}(2TV + 2TW - RU - RV - SY - 2Y) \\ \dot{X} &= 2RX \\ \dot{Y} &= -Y/\tau + SV + 2V + RY + SU + 2U - 2W \\ \dot{Z} &= 2TZ \end{aligned} \tag{56}$$

These equations have quasistationary solutions

$$-\tau t = \frac{47 + 8\sqrt{31}}{90} \ln|S + 6 - \sqrt{31}| + \frac{47 - 8\sqrt{31}}{90} \ln|S + 6 + \sqrt{31}| - \frac{7}{45} \ln|S + 2| - \frac{8}{9} \ln|1 + 2S| \tag{57}$$

$$R = -\frac{(2 + S)(6 + S)(1 + 2S)}{(5 + 6S)}\tau \qquad T = -\frac{(2 + S)(1 + S + S^2)}{(5 + 6S)}\tau$$

$$V = V_0 \frac{1 + 2S}{S^2 + 12S + 5} \qquad Y = (2 + S)\tau V$$

$$X = \frac{1 + 2S}{V} \qquad Z = \frac{1}{V}$$

$$U = \frac{2\tau}{3}[(4 - S)Y + (2R - T)V] \qquad W = \frac{2\tau}{3}[(2T - R)V - (S + 2)Y]$$

for $\tau \to 0$, with perturbations oscillating with circular frequencies

$$\omega = [\{5St\, 8 \pm (25S^2 + 8S + 4)^{1/2}\}/3]^{1/2}\,. \tag{58}$$

This stationary state of the ring is characterized by hydrostatical equilibrium in the z-direction and radial decrease of the orbital velocity, which is Keplerian ($S = -\frac{1}{2}$) for infinite disc ($X = 0$), or steeper; e.g. for constant angular momentum ($S = 0$) the radial width of the ring is equal to its thickness ($X = Z$). Dissipation of energy leads to increase of temperature ($\dot{V} > 0$) and expansion in both width and thickness on a time scale proportional to the viscosity ($\sim\tau^{-1}$). The velocity gradient converges to the constant $S_\infty = \sqrt{31} - 6$ for which the ratio of width to thickness is $[Z/X]^{1/2} \cong 2{\cdot}72$.

In the approximation of an optically thin disc, we can assume that the dissipated energy is radiated away immediately. Thus V is held in equilibrium with the temperature of radiation by an additional collisional term $(V_{rad} - V)/\tau_{rad}$ in equation (56) for V. When $\tau_{rad} \to 0$, the system of equations (56) for R, S, X and Y has a quasi-stationary solution

$$-\tau t = \frac{1}{9}\ln\frac{(1 + 2S)^2}{(2 + S)} - \frac{1}{6}\frac{1}{1 + 2S} \qquad X = \frac{1 + 2S}{V} \tag{59}$$

$$R = -\tau\frac{(2 + S)(1 + 2S)}{(1 + S)} \qquad Y = (2 + S)\tau V$$

with perturbations oscillating with frequency

$$\omega = [2(1 + S)]^{1/2}\,. \tag{60}$$

In this case the energy dissipation leads to a Keplerian velocity distribution and, hence, to the infinite width of the disc.

5. Conclusion

The method described here cannot provide us with a full description of many hydrodynamical and kinetic processes concerning the inner structure of different kinds of clouds of astrophysical interest (e.g. the fragmentation of a protostellar cloud, shock waves and kinetic instabilities in plasmatic clouds, etc.) which should be studied by a more comprehensive kinetic approach. However, following the arguments of Lubow and Shu (1975) concerning the comparison of one-particle and hydrodynamical calculations, this method (which is, in fact, a development of the one-particle method) can provide the appropriate model of the cloud in cases when external forces dominate its behaviour. For example, our preliminary computational results applied to gaseous streams in semi-detached binaries qualitatively confirm the vertical structure described by Lubow and Shu (1976), which is usually ignored by hydrodynamical computations. This method allows further improvements such as inclusion of different kinds of particles and interactions between them. Because the evolution of the cloud is described by a system of ordinary differential equations in this approximation, it can be numerically calculated by integration in real time without great demand on storage. Consequently, this method may be an useful tool for numerical experiments even with small calculators.

Acknowledgments

The author would like to thank Drs S. Kříž, J. Palouš, M. Šolc and other colleagues for many inspiring discussions and critical comments.

Appendix

Multi-Index Notation

Let $F(\xi)$ be a scalar function in N-dimensional space of vectors ξ. Its Taylor expansion at zero has the form

$$F(\xi) = \sum_{A_1, A_2, \ldots, A_N} \frac{1}{A_1!} \xi_1^{A_1} \cdot \frac{1}{A_2} \xi_2^{A_2} \ldots \frac{1}{A_N!} \xi_N^{A_N} \left[\frac{\partial^{A_1 + A_2 + \ldots + A_N}}{\partial \xi_1^{A_1} \cdot \partial \xi_2^{A_2} \ldots \partial \xi_N^{A_N}} F \right]_{\xi = 0} . \tag{A1}$$

To abbreviate this expression, let us introduce multi-indices, i.e. integer vectors $[A] = (A_1, A_2, \ldots, A_N)$ and let us define

$$[A]! = \prod_{K=1}^{N} A_K! \tag{A2}$$

and for any vector ξ or nabla operator ∇

$$\xi^{[A]} = \prod_{K=1}^{N} (\xi_K)^{A_K} \tag{A3}$$

(for technical reasons the multi-indices are denoted by brackets instead of by boldface types in this paper). The expression (A.1) can thus be rewritten in the form

$$F(\xi) = \sum_{[A]} \frac{1}{[A]!} \xi^{[A]} [\nabla^{[A]} F]_0 . \tag{A4}$$

It is advantageous to introduce following notation

$$\binom{[A]}{[B]} = \frac{[A]!}{[B]! ([A] - [B])!} = \prod_{K=1}^{N} \binom{A_K}{B_K} , \tag{A5}$$

$[B] \leqq [A]$ meaning that $B_K \leqq A_K$ for $K = 1, 2, \ldots, N$. While $[A]$, $[B]$, ... are general multi-indices, $[I]$, $[J]$, ... are unit vectors with only $I, J, \ldots$-components non-zero (and equal to 1). The summation rule is assumed for $I, J, \ldots$ as well as for $[I]$, $[J]$, ... whenever these integers occur twice in an expression.

REFERENCES

Eggen, O. J.: 1970, Vistas Astron. **12**, 367.
Flannery, B. P.: 1975, Astrophys. J. **201**, 661.
Lin, D. N. C.: Pringle, J. E.: 1976, IAU Symp. **73**, 237.
Lubow, S. H.; Shu, F. H.: Astrophys. J. **198**, 383.
—: 1976, Astrophys. J. **207**, L 53.
Yuan, C: 1977, Astron. Astrophys. **58**, 53.

Vol. 35 (1984), No. 6 335

graduate study. The author wishes to express his sincere appreciation to M. Dryer, C. D'Uston, S. T. Wu and T. V. Stepanova for kind and valuable discussions of interplanetary shock wave simulation during the author's participation in the STIP Meeting in Smolenice in 1980. Sincere thanks are also due to S. Borošová for drawing the figures and to J. Tomeková for typing the manuscript. The use of the computer facility IBM 370/148 at the Computational Laboratory of the Slovak Planning Commission in Bratislava is gratefully acknowledged. Finally, the author is indebted to the Water Research Institute for providing free time required to finish this work.

REFERENCES

Book, D. L.; Boris, J. P.; Zalesak, S. T.: 1981, Finite-Difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamics Calculations (Ed. D. L. Book, Springer-Verlag, New York), Chapt. 3.
Boris, J. P.: 1976, NRL Memorandum Report 3237 (Washington).
Boris, J. P.; Book, D. L.: 1976, J. Comput. Phys. **20**, 397.
D'Uston, C.; Dryer, M.; Han, S. M.; Wu, S. T.: 1981, J. Geophys. Res. **86**, 525.
Godunov, S. K.; Zabrodin, A. V.; Ivanov, M. Ya.; Krajko, A. N.; Prokopov, G. P.: 1976, Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoj dinamiki (Nauka, Moskva).
Hundhausen, A. J.: 1973, J. Geophys. Res. **78**, 1528.
Hundhausen, A. J.; Gentry, R. A.: 1969, J. Geophys. Res. **74**, 2908.
Metzler, N.; Cuperman, S.; Dryer, M.; Rosenau P.: 1979, Astrophys. J. **231**, 960.
Odstrčil, D.: 1984a, Comput. Phys. Commun. **31**, 13.
—: 1984b, Bull. Astron. Inst. Czechosl. **35**, 317.
Odstrčil, D.; Pintér, Š.: 1985, to be publ.
Stepanova, T. V.: 1979, Issledovaniya po geomagnetizme, aeronomii i fizike Solntsa **45**, 9.
—: 1980, Preprint No. 13—80 (SibIZMIR, Irkutsk).
Stepanova, T. V.; Uralov, A. M.: 1977, Issledovaniya po geomagnetizme, aeronomii i fizike Solntsa **42**, 83.
Weber, W. J.; Boris, J. P.; Gardner, J. H.: **1979**, Comput. Phys. Commun. **16**, 243.
Wu, S. T.; Dryer, M.; Han, S. M.: 1976, Solar Phys. **49**, 187.

A SIMPLE KINETIC MODEL OF A MULTIPARTICLE CLOUD

II. *Gaseous Streams in Algols*

P. Hadrava

Astronomical Institute, Czechoslovak Academy of Sciences, 251 65 Ondřejov, Czechoslovakia)*

Received 26 October 1983

ПРОСТАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЧАСТИЧНОГО ОБЛАКА

II. *Газовые струи в звездах типа Алголя*

Метод описанный в предыдущей статье используется для вычисления трехмерной газодинамической модели струй в двойных звездах. Результаты подтверждают неприменимость предположения о гидростатическом равновесии для вычисления вертикальной структуры струй. В работе тоже учитывается влияние адиабатического или изотермического расширения, или лучистого равновесия и изменения ионизации на строение струй.

The method described in a previous paper is used for computation of a three-dimensional gas dynamical model of streams in binaries. The results confirm the inapplicability of the assumption of hydrostatic equilibrium for vertical structure of streams. The influence of adiabatic or isothermal expansion, or radiative equilibrium in a stream on its structure, and the change of ionization are also investigated.

1. Introduction

In recent years, several attempts were made to calculate a hydrodynamical model of mass exchange in binaries (Prendergast, 1960; Biermann, 1971; Prendergast and Taam, 1974; Flannery, 1975; Lubow and Shu, 1975 and 1976; Sørensen et al., 1975 and 1976; Monks and Rayburn, 1978; Hensler, 1982). All of them more or less confirmed the qualitative picture of gaseous flow approaching the vicinity of the primary star and then turning into an accretion disc. This qualitative picture is also commonly accepted from the observational point of view. However, theoretical models differ in quantitative details. These differences can be understood as consequences of the properties (particularly of nume-

*) This work was curried out partly during the author's stay at the Institute of Astronomy, University of Cambridge, U. K.

rical viscosity) of each method. Unfortunately, the models cannot be directly compared with observations in order to select the most realistic of them. A theoretical model of radiation escaping from the stream and the disc would be desirable to enable this comparison. However, the radiative transfer in such envelopes is very complicated and does not depend solely on the geometry and dynamics. The circumstellar matter in binaries is in fact a kind of extended atmosphere, which is even farther from thermodynamical equilibrium than normal atmospheres due to greater dilution of radiation, slower relaxation in rarefied plasma, and to kinematics as well. Thermodynamic non-equilibrium can, in principle, involve not only excitation but also the kinetic degrees of freedom in extremely rarefied media like the stellar wind. The dynamical aspect is ordinarily taken as the basis of theoretical models of such extended atmospheres, and the radiative transfer and the internal state of matter is calculated as its consequence. However, feedback should also take place whenever the pressure is important in dynamics. The problem of mass exchange (and of extended atmospheres in general) is thus much more complex than a purely hydrodynamical one.

It was pointed out by Prendergast and Taam (1974) that the hydrodynamical equations can be obtained as moments of the Boltzmann kinetic equation and that the kinetic point of view is capable of providing a satisfactory method for solving hydrodynamical problems. The kinetic approach is a very promising tool for modelling extended atmospheres, because it can also be taken as the basis for studying radiative transfer and statistic equilibrium. The coupled problems of dynamics and radiative transfer or internal state can thus be naturally treated in the framework of the kinetic theory.

An approximation to the solution of the Boltzmann equation for an isolated blob of particles was developed in a previous paper (Hadrava, 1983, hereafter referred to as paper I). This method was originally devised to give an initial approximation for finite difference computations of hydrodynamical problems, especially the gas dynamics of Roche lobe overflow. The simplifying assumptions about the stream structure enable this method to solve problems, which would require too much memory and computer time if modelled by a straightforward numerical calculation. It is comparable, in this respect, to the semi-analytic method of Lubow and Shu (1975). However, owing to a more general kinetic basis, the method presented here is more easily adaptable to different physical assumptions concerning the state of matter.

2. Method of Calculation

2.1. *Continuous Stream*

The method described in paper I can immediately be applied to the calculation of motion, evolution of shape, internal velocity gradients and velocity dispersion of a gaseous blob ejected from the contact (i.e. secondary) component of a binary, e.g. through the L_1-point. Any such calculations show an expectable picture – the rapid elongation of the blob along its trajectory (see Fig. 1), resembling the spreading of a meteor stream along the trajectory of its parent comet. This result, as well as the generally

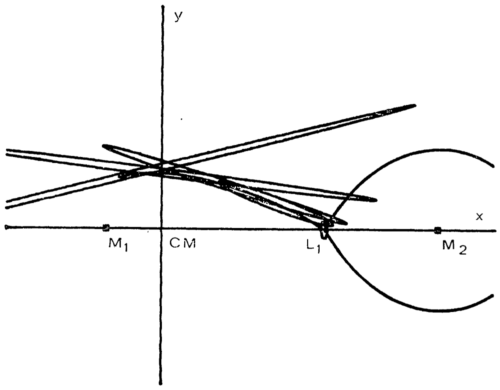


Fig. 1. Geometry of a gaseous blob falling in Roche potential of a binary with mass ratio $q = 0{\cdot}2$. Initial ratio of thermal/orbital velocity is $\varepsilon \simeq 0{\cdot}1$.

accepted view of Roche lobe overflow, reveals that an appropriate description of gas dynamics of mass exchange in binaries should be that of a continuous stream of matter, rather than a fall of separated blobs. However, this stream can be thought of as a superposition of set of successive blobs, at least if collisions between atoms (i.e. the redistribution of velocity dispersion) can be neglected. The distribution function will then read

$$\langle F\rangle(\xi) = \int F(\xi, t)\,\mathrm{d}t = = F_0 \int \exp\left[-(\xi^I - \xi_0^I(t))\,\mathsf{A}_{IJ}(t)\,(\xi^J - \xi_0^J(t))\right]\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

which can be approximated (if $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t$ can be neglected) in the vicinity of $\xi_0(0)$ by

$$\langle F\rangle(\xi) = = \langle F\rangle_0 \exp\left[-(\xi^I - \xi_0^I(0))\,\langle\mathsf{A}_{IJ}\rangle\,(\xi^J - \xi_0^J(0))\right], \tag{2}$$

Vol. 35 (1984), No. 6 337

where

$$(3) \qquad \langle F \rangle_0 = \sqrt{(\pi)}\, F_0(\xi_0^I(0)\, \mathsf{A}_{IJ}(0)\, \xi_0^J(0))^{-1/2}$$

and

$$(4) \qquad \langle \mathsf{A} \rangle_{IJ} = \mathsf{A}_{IJ}(0) - \\ - \mathsf{A}_{IK}(0)\, \xi_0^K(0)\, \mathsf{A}_{JL}(0)\, \xi_0^L(0) / (\xi_0^M(0)\, \mathsf{A}_{MN}(0)\, \xi_0^N(0)) \, .$$

Equation (2) expresses distribution function of a blob (or rather a tube), which is indefinite in the ξ-direction. This is seen from equation

$$(5) \qquad \langle \mathsf{A} \rangle_{IJ}\, \xi_0^J = 0 \, ,$$

which follows from (4) and can be rewritten in the notation of paper I [see Eq. (I-18a)] as

$$(6) \qquad \mathfrak{c}\dot{x} = 0 \, , \quad \dot{p} = -\mathfrak{b}\dot{x} \, .$$

In order to be able to allow for collisions, one should know the actual velocity distribution at a given point already during integration of the equation for $\mathsf{A}(t)$. This can be achieved if the initial conditions for $\mathsf{A}(t)$ satisfy Eq. (6), i.e. if the blob is extremely elongated ab initio. It follows from the equation of motion (I-12) for $\mathsf{A}(t)$, in the collisionless case, that the condition

$$(7) \qquad \mathsf{A}(t)\, \xi_0 = 0$$

is conserved for all t, whenever it is fulfilled at $t = 0$. On the other hand, collisions cause the relaxation of the stress tensor to equilibrium, i.e. they change the matrix $\mathfrak{a}$, but they do not affect matrices $\mathfrak{c}$ and $\mathfrak{b}$ (see equations (I-43) to (I-45)). Condition (6) is thus conserved even in the case of interacting particles.

2.2. *Coordinate System*

The co-rotating Cartesian coordinates $\{r\} = \{(x, y, z)\}$ and corresponding velocities $\{v\} = \{\dot{r}\}$ will be used as the basic coordinate system $\{\xi\} = \{(r, \dot{r})\}$ in the phase space for the kinetic treatment of mass exchange in a binary with a circular orbit (see Fig. 1). The canonical impulse is

$$p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}} = m(v - r \wedge \Omega) \, ,$$

so that the Jacobian of transformation $(r, p) \rightarrow (r, v)$ is constant and the Boltzmann equation is valid for the phase density per volume element $d^3 r\, d^3 v$.

The equations of motion of a particle in these coordinates are

$$(8) \qquad \dot{r} = v \, , \quad \dot{v} = 2v \wedge \Omega - \nabla \Phi \, ,$$

where

$$(9) \qquad \Phi = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$$

is the effective potential in the Roche approximation (tidal and rotational distorsions of both stars are neglected; this assumption is not necessary), $M_{1,2}$ are masses and $r_{1,2}$ distances to the centres of the primary and secondary star. Matrix C (see paper I) can be obtained from equation (8) as

$$(10) \qquad \mathsf{C} = \frac{\partial(\dot{r}, \dot{v})}{\partial(r, v)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & , & \mathbf{1} \\ -\nabla \otimes \nabla\Phi, & & 2\Omega \end{pmatrix} ,$$

where Ω is the skew-symmetric tensor $\varepsilon^{ijk}\Omega_k$. The secular equation for eigenvalues c of C can be written in the form

$$(11) \qquad \det(\nabla \otimes \nabla\Phi - 2\Omega c + c^2\, \mathbf{1}) = 0 \, ,$$

which is the cubic equation for c^2. This equation can thus be solved in an explicit way (and, consequently, Jordan's decomposition of C and the expression for $\exp(-\mathsf{C}t)$ can be obtained analytically) even for points out of the orbital plane, where the direction of Ω does not coincide with any eigenvector of $\nabla \otimes \nabla\Phi$. Nevertheless, it will not be written down here for a general point r, because C is not constant along the trajectory of the blob centre (with the only exception of a blob standing at a Lagrange point), and $\exp(-\mathsf{C}t)$ is only an approximation to the desired matrix B anyway [see Eq. (I-20)], so that the expansion of this exponential into a power series is sufficiently accurate and more efficient for numerical purposes.

2.3. *Initial Conditions*

The initial conditions for density, velocity and 21 independent components of matrix A are to be chosen at the L_1-point. An arbitrary combination of these values determines a general blob of gas. This blob turns into a continuous, time independent stream, if condition (6) is satisfied, but it still possesses 15 degrees of freedom for a given outflow velocity (6 for the stress tensor, 3 for the shape and 6 for the velocity gradients in cross-section). A proper choice of these free parameters can introduce into the calculation effects like a quasiperiodic change of stream thickness (a stationary wave) if the hydrostatic equilibrium in the z-direction is violated. In order to estimate the behaviour of the flow in the L_1-region, let us treat a blob moving very slowly through the L_1-point. Matrix C can be thought of as time independent in this case, with

$$(12) \qquad \nabla \otimes \nabla\Phi = \Omega^2 \operatorname{diag}(-2\mathscr{A} - 1, \mathscr{A} - 1, \mathscr{A}) \, ,$$

where

$$(13) \qquad \mathscr{A} = \frac{R^3}{1 + q}\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{q}{r_2^3}\right) ,$$

$q = M_2/M_1$, R is the separation of stars. There are 2 real roots

(14a) $c_{1,2} = \pm\Omega[\frac{1}{2}(9\mathscr{A}^2 - 8\mathscr{A})^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}\mathscr{A}]^{1/2}$

and 4 imaginary roots

(14b) $c_{3,4} = \pm i\Omega[\frac{1}{2}(9\mathscr{A}^2 - 8\mathscr{A})^{1/2} + 1 - \frac{1}{2}\mathscr{A}]^{1/2}$

(14c) $c_{5,6} = \pm i\Omega\mathscr{A}^{1/2}$

of Eq. (11). The corresponding (right-hand) eigenvectors are

$$(15)\quad \boldsymbol{c}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ 0 \\ c_k x_k \\ c_k y_k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ for } k = 1, 2, 3, 4, \text{ and } \boldsymbol{c}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ c_k \end{pmatrix}$$

for $k = 5, 6$,

where

$$(15a)\qquad y_k = \frac{c_k^2 - \Omega^2(2\mathscr{A} + 1)}{2\Omega c_k} x_k$$

$$\left(\text{and } x_k^2 = \frac{1}{3\mathscr{A}}\left[\frac{c_k^2}{\Omega^2} + \mathscr{A} - 1\right] \quad \text{if} \quad x_k^2 + y_k^2 = 1\right).$$

Following paper I, matrix $\mathbf{A}$ at time t is

$$(16)\qquad \mathbf{A}(t) = \mathbf{B}^T(t)\,\mathbf{A}(0)\,\mathbf{B}(t) = \sum_{i,j=1}^{6} \exp(-c_i t - c_j t)\,\mathsf{A}_{(ij)}\boldsymbol{c}_i^{*T} \otimes \boldsymbol{c}_j^*,$$

where $\boldsymbol{c}_k^*$ are dual (i.e. left-hand) eigenvectors and coefficients

$$(17)\qquad \mathsf{A}_{(ij)} = \mathsf{A}_{(ij)} = \boldsymbol{c}_i^T\,\mathbf{A}(0)\,\boldsymbol{c}_j.$$

Consequently, there are only 3 independent, time constant modes, given by (real) coefficients $\mathsf{A}_{(12)} = \mathsf{A}_{(21)}$, $\mathsf{A}_{(34)} = \mathsf{A}_{(43)}$ and $\mathsf{A}_{(56)} = \mathsf{A}_{(65)}$. It can easily be seen that coefficient $\mathsf{A}_{(56)}$ determines the kinetic temperature and corresponding thickness in the z-direction

$$(18)\qquad \langle z^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle / |c_5|^2 = \frac{kT}{m\Omega^2\mathscr{A}}$$

in the case of hydrostatic equilibrium (while $\mathsf{A}_{(55)}$ and $\mathsf{A}_{(66)}$ should determine the amplitude of oscillation with circular frequency $|2c_{5,6}|$ in the non-equilibrium case). The quadratic form $\xi^T\mathbf{A}\xi$ is indefinite in the plane spanned by (real) eigenvectors $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ if $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$. This is not true in the real plane spanned by $\boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ (if $\mathsf{A}_{(34)} \neq 0$), because these vectors are mutually complex conjugated. If the blob is finite at $t = 0$, the coefficients $\mathsf{A}_{(11)}$ and $\mathsf{A}_{(22)}$ must be non-zero ($\mathsf{A}_{(11)} \cdot \mathsf{A}_{(22)} < \mathsf{A}_{(12)}^2$). Because of damping of the component $\mathsf{A}_{(11)}$ [see Eq. (16)], the blob elongates in the $\boldsymbol{c}_1$-direction (in phase space) during its evolution. Consequently it approaches (for $t \to \infty$) the shape of a tube with its axis in the direction of vector (x_1, y_1, 0). Due to condition (6), this is the direction of the outflow velocity $\boldsymbol{v}_{L1}$. On the other hand, the distribution function tends to the δ-function $\delta(\boldsymbol{c}_2^*\xi)$ in the ($\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$)-plane as component $\mathsf{A}_{(22)}$ diverges. It corresponds to cooling in the $\boldsymbol{v}_{L1}$-direction. The longitudinal velocity $v_\parallel$ of the stream can be obtained from condition $\boldsymbol{c}_2^*\xi = 0$ in the form

$$(19)\qquad v_\parallel = c_1 s - 2\Omega n,$$

where s and n are distances from the L_1-point in the directions (x_1, y_1, 0) and (y_1, $-x_1$, 0), respectively (i.e. parallelly and perpendicularly to $\boldsymbol{v}_{L1}$). If the velocity of the individual particle is decomposed into longitudinal $v_\parallel$ and transverse $v_\perp$ (with respect to $\boldsymbol{v}_{L1}$) components and the former is substituted from Eq. (19), the projection of ξ into $\boldsymbol{c}_{3,4}$ is

$$(\boldsymbol{c}_3^*\xi) = \overline{(\boldsymbol{c}_4^*\xi)} \simeq c_3 n + v_\perp,$$

hence the distribution function F in the orbital plane is given by

$$\ln F \simeq \xi^T\,\mathbf{A}(t \to \infty)\,\xi \simeq \mathsf{A}_{(34)}(n^2 + v_\perp^2/|c_3|^2).$$

The mean transverse velocity $v_\perp$ is thus zero for all n even for non-zero s and the width of the stream in the n-direction is

$$(20)\qquad \langle n^2 \rangle = \frac{kT}{m|c_3|^2} = \frac{kT}{m} \Big/ \left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\Phi + \frac{v^2}{2}\right)\right],$$

which is consistent with the Bernoulli equation (along the streamline) and the assumption of hydrostatic equilibrium deep in the contact atmosphere. The approximation given above is the same as the asymptotic behaviour of the stream in the L_1-region, described by Lubow and Shu (1975, 1976), characterized by their parameters θ_s, α, β, γ, v, χ. It was obtained here as the "smoothest" outflow with all oscillating modes suppressed. However it required zero kinetic tempetature in the $\boldsymbol{v}_{L1}$-direction. The collisional energy exchange with perpendicular directions will thus give rise to these oscillating modes. Because of the great efficiency of relaxation, we will put the stress tensor (matrix $\boldsymbol{\alpha}$) under the initial condition equal to the isotropic one, corresponding to equilibrium with radiative temperature. This thermal dispersion of longitudinal velocity $v_\parallel$ should be damped during relaxation time $\sim c_1^{-1}$ [see Eq. (16)] by the evaporation of the blob. The mass lost by this

Vol. 35 (1984), No. 6 339

evaporation must be provided by transport from the contact atmosphere with the same (thermal) order of velocity. The outflow velocity exactly at the L_1-point (i.e. $s = 0$) is thus non-zero for a continuous stream with relaxation and Eq. (19) can be valid only if

$$s \geqq (\text{thermal velocity})/c_1 \simeq \varepsilon R ,$$

where ε is the "small" parameter of Lubow and Shu (but it is of the order of 10^{-2} in Algols). To enable comparison of the present method with those of Lubow and Shu, we will choose the same initial condition but at point $s = \varepsilon R$ instead of L_1 (in the opposite case, the stream structure in the n-direction changes significantly before reaching this point). However, it should be pointed out that these conditions are not the only possibility and another choice (e.g. swirling around $\boldsymbol{v}_{L1}$) could fit the observed stream structure better.

2.4. *Collisional Term*

If collisions are not taken into account, the stress tensor deviates from the isotropic one. Typically, the kinetic temperature decreases in the direction of the stream path and increases in the perpendicular directions as a consequence of the expansion parallel to the velocity and depression of the stream cross-section. However, the isotropisation of kinetic temperature in all directions takes place in the physically realistic case, because the collisional relaxation time is much less than the dynamic time scale. The predominance of expansion (or contraction) thus causes adiabatic cooling (or heating). The method of the small parameter, used by Lubow and Shu, implicitly supposes constant temperature. This assumption is physically not well-founded, because it would require an ad hoc thermal bath of a sufficient heat capacity. The radiation field can act, in principle, as such a bath, but its temperature T_r is not exactly constant. Moreover, the influence of radiative heating or cooling is very sensitive to the optical thickness of the stream and its geometry. Despite the complexity of the radiative transfer problem, we can assume adiabatic expansion and radiative equilibrium to be two opposite cases of the thermal regime of the stream. The former can take place in extremely dense (great mass transfer rate $\dot{M}$), optically thick streams, only the outer parts of which are influenced by radiation; the latter can be achieved in extremely rarefied (small $\dot{M}$), optically thin streams, whose self-obscuring can be neglected. This type of thermal regime can quantitatively change the dynamics of the stream as a result of different pressure resistance against tidal and Coriolis forces. Moreover, it can be of some importance for comparison with observation.

The present method is simply adaptable for modelling of different regimes mentioned above by including the collision term. Following paper I [Eq. (I-53)], it has the form

$$\left(\frac{\delta \boldsymbol{\alpha}}{\delta t}\right)_c \simeq \frac{1}{\tau}(\boldsymbol{\alpha}^e - \boldsymbol{\alpha}) , \tag{21}$$

where τ is a very small relaxation time and

$$\boldsymbol{\alpha}^e = 2\,\frac{kT^e}{m}\,.\,\mathbf{1} \tag{22}$$

is the equilibrium stress tensor, proportional to equilibrium temperature T^e. $\boldsymbol{\alpha}^e$ is thus constant in the isothermal case, equal to

$$\boldsymbol{\alpha}^e = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\alpha})\,.\,\mathbf{1} \tag{22a}$$

in the case of adiabatic expansion (for an ideal, one-atomic gas), or it is proportional to T_r in the case of radiative equilibrium. T_r is estimated from the sum of the energy density of light diluted from both stars

$$T_r = [\tfrac{1}{2} \sum_i T_i^4 (1 - (1 - R_i^2/r_i^2)^{1/2})]^{1/4} , \tag{23}$$

where $T_{1,2}$ are effective temperature and $R_{1,2}$ radii of both stars. R_2 is approximated by fit

$$\log (R_2/R) = \tfrac{1}{6} \log q - {\cdot}1827 - \\ - [(\tfrac{1}{6} \log q - {\cdot}109966)^2 + {\cdot}04513]^{1/2} \tag{24}$$

to Kopal's (1959) equivalent radii. So-called "third light" caused by a hot spot can be added to the sum ($i = 3$) in Eq. (23) if the area R_3^2 of the spot and energy radiated (proportional to $T_3^4 R_3^2$) is estimated from a previous model of the stream. However, the self-obscuration of this light by the stream can scarcely be neglected. The energy released during an adiabatic expansion due to change of excitation or ionization can be strightforwardly included into the calculation. In the latter case the change of the particle mean mass m must also be taken into account. The equation of motion (I-49) for $\boldsymbol{\alpha}$ (with collisions included) can be schematically written in the form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\delta \boldsymbol{\alpha}}{\delta t}\right)_d + \left(\frac{\delta \boldsymbol{\alpha}}{\delta t}\right)_c , \tag{25}$$

where the first term on the r.h.s. represents the "dynamical" change (i.e. that in the absence of collisions). This equation is numerically integrated in two steps in the present calculations:

1) collisionsless expansion of the blob

$$(26a) \qquad [\mathfrak{a}(t_0 + \Delta t)]_d \simeq \mathfrak{a}(t_0) + \Delta t \left(\frac{\delta \mathfrak{a}}{\delta t}\right)_d$$

for the integration step Δt, and

2) subsequent collisional relaxation

$$(26b) \quad \mathfrak{a}(t_0 + \Delta t) \simeq (1 - D)\, \mathfrak{a}^e + D[\mathfrak{a}(t_0 + \Delta t)]_d\,,$$

where

$$(26c) \qquad D \simeq \tau/\Delta t$$

is a small relaxation parameter. It holds constant here (usually $D = 0$, which corresponds to ideal relaxation). Further improvement in this respect is in progress.

2.5. *Ionization*

The previous hydrodynamical models of mass exchange in binaries assumed the gas to consist of only one type of particle, usually of mass equal to 1 or 1/2 of the hydrogen atom, depending on whether neutral or ionized gas was supposed. However, because the density and temperature change significantly along the path of the stream, the ionization of different atoms can also vary in the stream. This may be important not only from the observational point of view, but also for the dynamics of the stream, for two reasons: the number density and pressure increase with increasing degree of ionization (for a given temperature) and the temperature is influenced by the equilibrium with internal, ionization degrees of freedom in the case of adiabatic expansion. The degree of ionization is computed here with the use of the relevant subroutines modified from the stellar atmosphere code of Hubený (1981).

3. Results

Several models with different parameters and physical assumptions have been calculated. Four of them, with parameters given in Tab. I, are presented here. Models A and B were chosen in order to compare the present method with that of Lubow and Shu. The nonsensically small period of model A enables parameter ε to achieve a small value (which is crucial for their method), model B demonstrates the influence of the large value of ε. Models C and D correspond to Algol (β Per) and U Cep, respectively. Standard solar abundances were assumed for elements with atomic numbers up to Z_{max} in all models. The ionization was calculated for models C and D, but it was held constant for models A and B (for correspondence with models of constant particle mass). The relaxation was calculated according to Eqs. (26) and (22a) for models A and B. The temperature, calculated from Eq. (22), and density, proportional to $\det^{1/2}(\mathfrak{a})$, or volume, proportional to the stream cross-section and velocity [see Eq. (I-15)], then really obey the rule of adiabatic expansion of a one-atomic gas. The assumption of radiative equilibrium (i.e. Eqs. (22) and (26) with $T^e = T_r$) was used for models C and D. Isothermal models with constant ionization were also calculated as a comparison for all models (see dash-dotted lines in figures). The dependence of different physical parameters on distance s from the L_1-point (measured along the stream in units R) is plotted in Figs. 2 to 5 for all models separately. The values given by Lubow and Shu are marked by crosses for models A and B. The z-thickness of the stream $\sqrt{\langle z \rangle^2}$ coincides very well with the

Table I

Parameters of computed models

	Model	A(L & S)	B(L & S)	C(β Per)	D (U Cep)
Input parameters	$T_{ef_{1,2}}$ [°K]	10 000 3 000	10 000 3 000	12 000 5 500	13 500 5 300
	$M_{1,2}$ [$M_\odot$]	0·5 1·0	0·5 1·0	3·7 0·81	4·2 2·8
	R_1 [$R_\odot$]	10^{-3}	10^{-3}	3·08	3·0
	Per. [day]	$2 . 10^{-4}$	200	2·86747	2·493
	$\dot{M}$ [$M_\odot$/year]	10^{-6}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-6}
	type of relaxation	adiabat.	adiabat.	radiative	radiative
	ionization	const.	const.	var.	var.
	Z_{max}	2	2	8	8
	ε	$1{\cdot}03 . 10^{-3}$	0·086	$2{\cdot}32 . 10^{-2}$	$2{\cdot}07 . 10^{-2}$
	R [$R_\odot$]	$1{\cdot}65 . 10^{-2}$	165·0	14·0	14·8
	R_2 [$R_\odot$]	$7{\cdot}33 . 10^{-3}$	73·3	3·55	5·07

dynamical structure claimed by Lubow and Shu (1976; see their parameter χ) in the isothermal case, i.e. it is higher than hydrostatic models have assumed (dashed lines in figures). However, this thickness is less in the adiabatic approximation or, on the other hand, even higher under radiative equilibrium. This is caused by the different resistances of pressure against the tidal force. The thickness should thus be higher for optically thin streams (less $\dot{M}$) and lower for dense, cold streams (higher $\dot{M}$). The width $\sqrt{\langle n^2 \rangle}$ (in the orbital plane) of the stream shows similar behaviour. This parameter (γ of Lubow and Shu) is very sensitive to the initial conditions. Owing to "dynamical memory" (i.e. the inertia of expansion) the stream cross-section at a given point thus depends in a complicated way on the history of the balance between tidal forces and pressure and, consequently, on the thermal regime of the stream. The depression of the cross-section at the nearest approach to the primary is usually less in the adiabatic approximation than in the isothermal or radiative one. Nevertheless, it is still so high that the density (and consequently

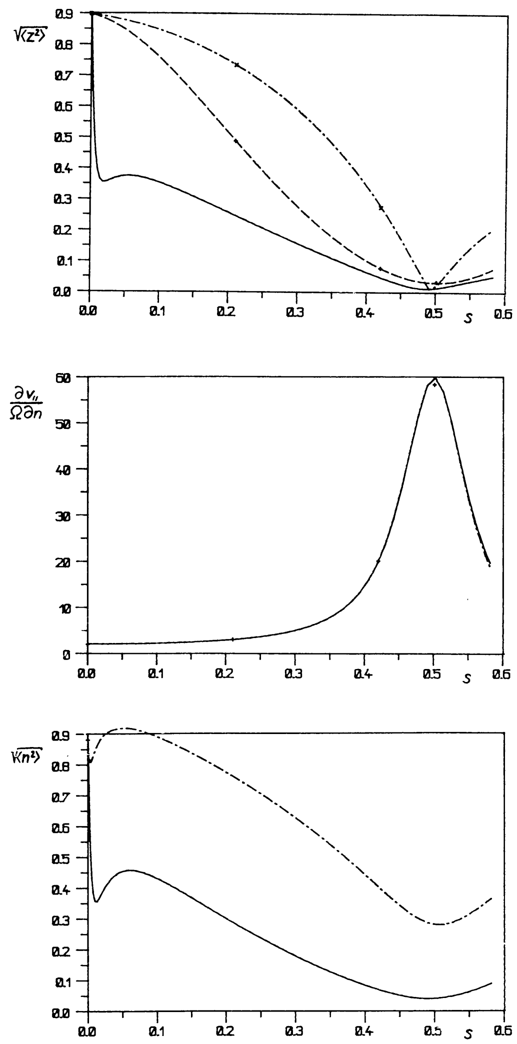


Fig. 2. Structure of the stream — model A. Solid line corresponds to thermal regime given in Tab. I, dash-dotted line to isothermal regime and dashed line to hydrostatic model. Crosses denote the values given by Lubow and Shu (1975, 1976).

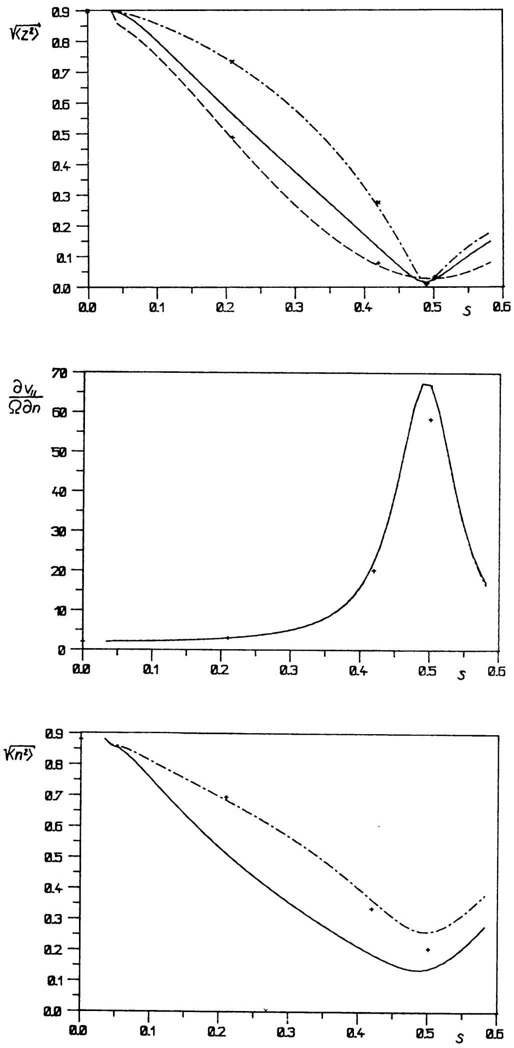


Fig. 3. Structure of the stream — model B.

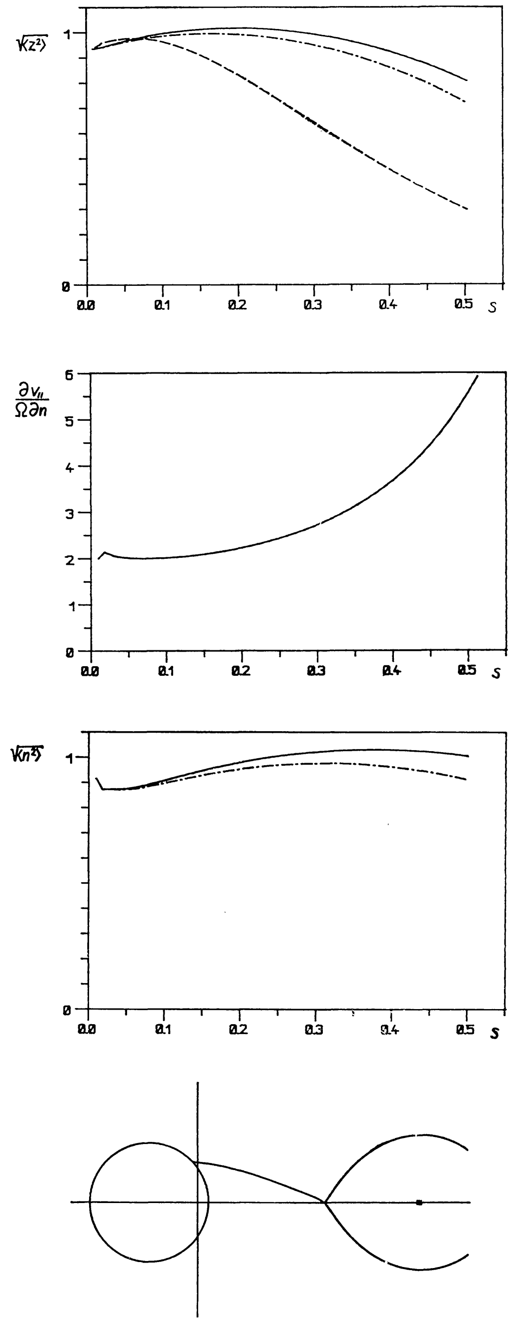


Fig. 4. Structure of the stream — model C.

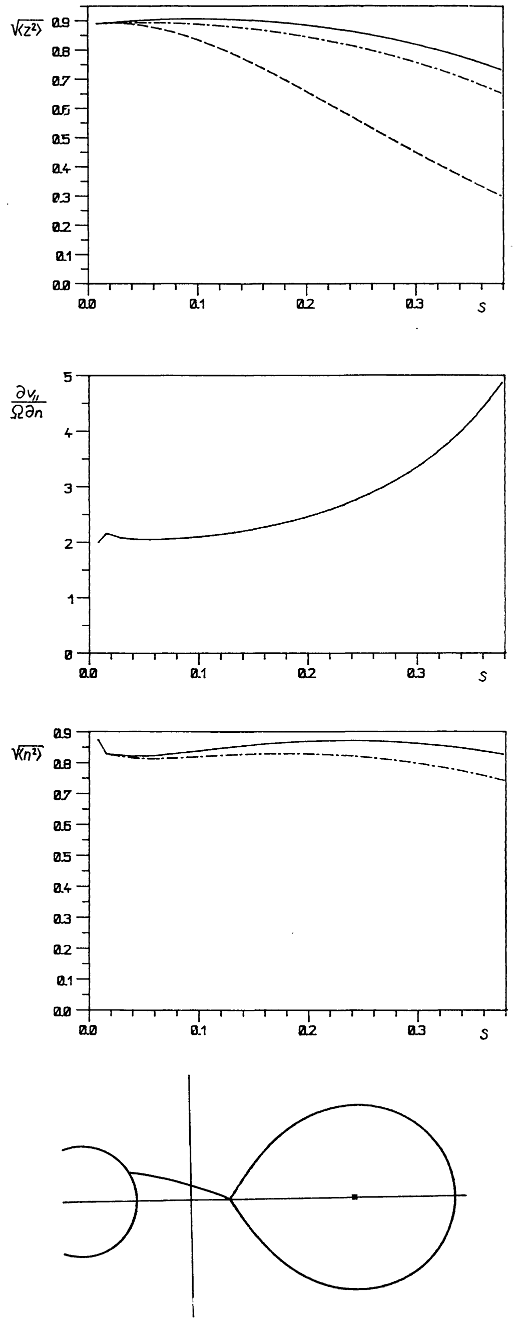


Fig. 5. Structure of the stream — model D.

[19] Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. No. 70, 263

[19] Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. No. 70, 263

Astron. Astrophys. 256, 519–524 (1992)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

Radiative transfer in rotating stars

P. Hadrava

Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, 251 65 Ondřejov, Czechoslovakia

Received May 24, accepted November 10, 1991

Abstract. The radiative transfer in atmosphere of a rotationally oblated star is investigated. The horizontal diffusion of light is calculated for a gray model in radiative equilibrium with a power law for opacity. Its influence on the gravity darkening is discussed.

Key words: stellar rotation – extended atmospheres – radiative transfer – gravity darkening

1. Introduction

A stellar configuration in hydrostatic equilibrium must be homogeneous on each equipotential surface. This statement is non-trivial as soon as the assumption of plane-parallel or spherical symmetry is abandoned, as it is the case of rotationally and/or tidally distorted stars. In these cases the assumption of homogeneity of the temperature is in general violated by radiative transfer (so called von Zeipel's paradox - see, e.g., Tassoul, 1978). The radiative equilibrium in regions with different surface gravity accelerations g (and consequently also the optical depths of particular equipotential surfaces) gives rise to temperature gradients along the equipotential surfaces. In its turn, this temperature gradient leads to a horizontal mass flow (meridional circulations) which tends to homogenize the physical conditions in the layer.

It is usual (e.g. in the theory of light-curves of eclipsing binaries) to describe the influence of distortion of a star in terms of the *gravity darkening*. In this approach the atmosphere is assumed to be locally plane-parallel (i.e. one-dimensional) but irradiated from below by a radiative flux varying across the stellar surface. According to von Zeipel's theorem this flux (and also the effective temperature) is determined by the gradient (with respect to the optical depth τ) of the source function in the subphotospheric layers and it is thus inversely proportional to the effective g at the given point of the stellar surface. However, the complicated temperature dependence $T = T(\tau)$ in the photosphere in radiative equilibrium then violates the underlying assumption of the homogeneity on equipotential surfaces. On the contrary, if the horizontal homogenization is sufficiently effective also in the photosphere, it will significantly decrease the gravity darkening ($T_{\rm eff} \sim g^{0.14}$ for a gray atmosphere) and it will also make the limb darkening dependent on g (Hadrava, 1987b, 1988). To decide between these two approximations, it would be necessary to consider both the three-dimensional radiative transfer and the hydrodynamics of the meridional circulations in the atmosphere. Here we will deal with the radiative transfer only. This problem has been outlined by Pustylnik already in 1970, some general considerations are included e.g. in the monograph by Kopal (1989), however there is no satisfactory method of its solution up to now.

Assuming the homogeneity on equipotential surface to be a zero-order approximation only, it is advantageous to treat the radiative transfer in Roche coordinates, one of which is the potential itself. The equation of radiative transfer can be directly obtained from the kinetic theory. In the case of three-orthogonal coordinates it has the form of Eq. (1) (see below, also Hadrava, 1981). However, three-orthogonal Roche coordinates do not exist for a general potential Φ (Kopal & Ali, 1971; Hadrava, 1987a). This is also the case of tidally distorted stars, where the equation of radiative transfer is somewhat more complicated (Hadrava, 1987b). This is why we restrict the present study to the two-dimensional case of a rotating star.

The two-dimensional nature of radiative transfer in an oblated star (or the three-dimensional one in a generally distorted star) involves a qualitatively new effect – *horizontal diffusion of light*, which has not been taken into account by the above mentioned approximations. This effect, in principle, helps to restore the hydrostatic equilibrium, but it decreases the gravity darkening. To estimate the importance of this effect, the equation of radiative transfer will be solved here in the diffusion approximation in horizontal direction. The method of solution of the equation of radiative transfer will be outlined in Sect. 2. In Sect. 3, this method will be applied to the gray atmosphere with power law for the opacity as a function of the effective potential. This potential will be given by the first order correction of the Roche model to the spherical symmetry. The numerical results and their consequences for the gravity darkening will be given in the Sect. 4.

2. Radiative transfer

In the case of axial symmetry there do exist three-orthogonal coordinates $\{q_i\}$ – see Fig. 1. The equation of radiative transfer then reads

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + \sum_i \frac{n_i}{h_i}\frac{\partial I}{\partial q_i} + \sum_{ik} \frac{h_{k,i}n_k - h_{i,k}n_i}{h_i h_k} n_k \frac{\partial I}{\partial n_i} = \alpha(S - I) , \quad (1)$$

where $n_i = h_{(i)} dq_i/ds$ are direction cosines, h_i^2 are metric coefficients ($ds^2 = \sum h_i^2 dq_i^2$), $h_{i,k} = dh_i/dq_k$. Let us suppose the solution of this equation to be a superposition of radial and meridional parts

$$I = I_{\rm r}(\mu) + n_2 I_{\rm m}(\mu) \quad (2)$$

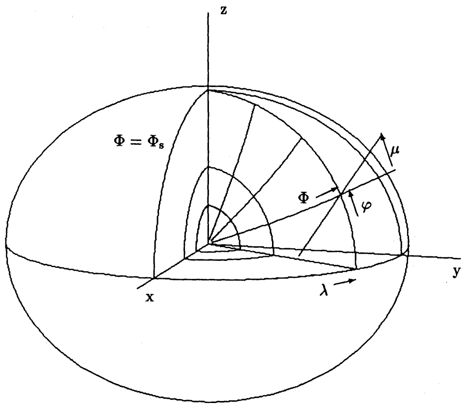


Fig. 1. The geometry of Roche coordinates $q_1 \equiv \Phi$, $q_2 \equiv \varphi$ and $q_3 \equiv \lambda$ in the oblated star. The coordinate lines φ, λ = const. are perpendicular to equipotentials Φ = const. The direction cosine $n_1 \equiv \mu$ is measured between the normal to the equipotential surface and the ray

($\mu = n_1$). Then averaging Eq. (1) over n_2 (n_1 fixed) we obtain

$$\left[\frac{\mu}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{1-\mu^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial \mu}+\alpha\right] I_\mathrm{r} + +\frac{1}{h_2}\left[\mu^2\frac{h_{1,2}}{h_1}+\frac{1-\mu^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}-\frac{h_{1,2}}{h_1}\mu\frac{\partial}{\partial \mu}+\frac{h_{3,2}}{h_3}\right)\right] I_\mathrm{m} = = \alpha S\,, \tag{3}$$

where

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_2}+\frac{h_{3,1}}{h_3}\right) \tag{4}$$

is the curvature of the surface q_1 =const. Averaging Eq. (1) multiplied by n_2 yields

$$\frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}-\frac{h_{1,2}}{h_1}\mu\frac{\partial}{\partial \mu}\right] I_\mathrm{r} + + \left[\frac{\mu}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{1-\mu^2}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{h_{2,1}}{h_1h_2}\right)\frac{\partial}{\partial \mu}-\frac{h_{2,1}}{h_1h_2}\mu+\alpha\right] I_\mathrm{m} = = 0. \tag{5}$$

Equation (3) can be treated as an equation for I_r with an additional source term due to the divergence of I_m, and actually, it has the form of the standard equation of radiative transfer in spherical symmetry, where the curvature radius ρ allows for the dilution of light. On the other hand, Eq. (5) determines I_m arising due to the horizontal gradient of I_r. These equations can be solved by means of moments

$$M^k_{r,m}=\int \mu^k I_{r,m}\frac{d\mu}{2}\,. \tag{6}$$

The corresponding moment equations read

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}M^{k+1}_\mathrm{r}+\alpha M^k_\mathrm{r}+\frac{1}{\rho}\left[(k+2)M^{k+1}_\mathrm{r}-kM^{k-1}_\mathrm{r}\right] = \tag{7}$$

$$= \alpha S^k - \frac{h_{1,2}}{h_1h_2}M^{k+2}_\mathrm{m}-\frac{1}{2h_2}\left(\frac{h_{3,2}}{h_3}+\frac{\partial}{\partial q_2}\right)(M^k_\mathrm{m}-M^{k+2}_\mathrm{m}) - -\frac{h_{1,2}}{2h_1h_2}\left((k+1)M^k_\mathrm{m}-(k+3)M^{k+2}_\mathrm{m}\right)$$

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}M^{k+1}_\mathrm{m}-\frac{h_{2,1}}{h_1h_2}M^{k+1}_\mathrm{m}+\alpha M^k_\mathrm{m} + +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{h_{2,1}}{h_1h_2}\right)\left((k+2)M^{k+1}_\mathrm{m}-kM^{k-1}_\mathrm{m}\right) = = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}M^k_\mathrm{r}-\frac{(k+1)h_{1,2}}{h_1h_2}M^k_\mathrm{r}+\frac{h_{1,2}}{2h_1h_2}\left(I^+_\mathrm{r}-(-1)^{k+1}I^-_\mathrm{r}\right), \tag{8}$$

where $I^\pm_\mathrm{r} = I_\mathrm{r}(\mu = \pm 1)$, and the moments of the source function are

$$S^k=\frac{1-(-1)^{k+1}}{2(k+1)}S \tag{9}$$

in the case of its isotropy. This infinite set of equations must be closed by an assumption on higher moments. A simple possibility follows from the method of Eddington factor. Let us suppose the radial part to be quadratic in μ

$$I_\mathrm{r}(\mu)=\frac{15}{4}(3f-1)J\mu^2+3\mu H+\frac{3}{4}(3-5f)J, \tag{10}$$

where $J = M^0_\mathrm{r}$, $H = M^1_\mathrm{r}$ and $K = M^2_\mathrm{r} = fJ$. If the meridional part is isotropic, $\partial I_\mathrm{m}/\partial\mu = 0$, then, similarly to Eq. (9),

$$M^k_\mathrm{m}=\frac{1-(-1)^{k+1}}{2(k+1)}3M\,, \tag{11}$$

where $M = I_\mathrm{m}/3$.

The first two equations from the set (7) and the first one from (8) thus read

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}H+\frac{2}{\rho}H=\alpha(S-J)-\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3M) \tag{12}$$

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}(fJ)+\frac{3f-1}{\rho}J=-\alpha H, \tag{13}$$

$$\alpha M=-\frac{1}{3h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}J+\frac{5(3f-1)h_{1,2}}{6h_1h_2}J \tag{14}$$

If the Eddington factor $f = f(q)$ is known, this set of equations can be completed by the condition of radiative equilibrium

$$S=J. \tag{15}$$

Generally, f must be calculated from S, taking into account also the boundary conditions. Here we will use a simple method (Hadrava 1974), based on the expansion of intensity into Legendre polynomials in μ. If all but the standard plane-parallel terms ($\mu\partial_\tau I + I$) of the equation of radiative transfer (e.g. in the form of Eq. (3)) are formally treated as parts of a generalized non-isotropic source function $\mathscr{S} = \sum_{i=0}^{\infty}\mathscr{S}_i\mu^i$ (and taken from the previous iteration), the moments can be calculated as the convolution

$$M^k=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\mathscr{S}_i\overset{\tau}{*}\tilde{E}_{k+i+1}\right) \tag{16}$$

in the optical depth τ, where

$$\tilde{E}_n(\tau) = \mathrm{sign}^{n+1}(-\tau)E_n(|\tau|) \tag{17}$$

is a modified integral exponential function. This generalized Λ-iteration converges well for small deviations from the plane-parallel geometry.

Recalling the definition (4) of ρ, the equation of continuity (12) can be then rewritten in the form

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3H) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3M) = 0. \tag{18}$$

Note that substituting here for H and M from Eqs. (13) and (14), we obtain a homogeneous partial differential equation for J, which can be written schematically in the form

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(F_1\frac{\partial}{\partial q_1}(G_1J)\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(F_2\frac{\partial}{\partial q_2}(G_2J)\right) = 0\,. \tag{19}$$

This equation can be solved by the method of successive approximations. In the first step, we neglect the nonsphericity, i.e. we suppose $\alpha = \alpha(q_1)$, $f = f(q_1)$, $h_1 = h_1(q_1)$ $(= dr/dq_1$ in the case of Euclidean geometry), $h_2 = r(q_1)$ and $h_3 = r\cos q_2$. In this case the variables can be separated and Eq. (19), which now reads

$$\frac{3\alpha}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{r^2}{\alpha h_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(f\bar{J}) + \frac{3f-1}{r}\bar{J}\frac{dr}{dq_1}\right)\right] + \\ + \frac{1}{\cos q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\cos q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\bar{J}\right] = 0\,, \tag{20}$$

has a general solution

$$\bar{J} = \sum j_n R_n(q_1)P_n(\sin q_2)\,, \tag{21}$$

where P_n is a Legendre polynomial, R_n gives the radial dependence of the corresponding mode and j_n is a constant.

In the second step, we will obtain the following perturbed equation

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\bar{F}_1\frac{\partial}{\partial q_1}(\bar{G}_1\delta J)\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\bar{F}_2\frac{\partial}{\partial q_2}(\bar{G}_2\delta J)\right) = \\ = -\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\bar{F}_1\frac{\partial}{\partial q_1}(\delta G_1\bar{J})\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\bar{F}_2\frac{\partial}{\partial q_2}(\delta G_2\bar{J})\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\delta F_1\frac{\partial}{\partial q_1}(\bar{G}_1\bar{J})\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\delta F_2\frac{\partial}{\partial q_2}(\bar{G}_2\bar{J})\right)\,, \tag{22}$$

where the bar denotes the spherical and δ the perturbed values. The solution of this equation can be found easily, because its left hand side is the same as in Eq. (20) and its Green's function can be found. As an example, this solution will be given in the next section for the Roche geometry and a power-law opacity distribution.

3. The Roche model

Let us assume the Roche model of a star rotating with angular velocity Ω, the value of which will be chosen as the unit. As the radial coordinate q_1 we use the effective potential

$$\Phi = -\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\left(r^2 - (\mathbf{\Omega r})^2\right)\,, \tag{23}$$

where $\mathbf{r}$ is the radius vector in the units of the critical radius (critical value of $\Phi = -\frac{3}{2}$). Following the procedure of the construction of Roche coordinates (Hadrava, 1987a),

$$\mathbf{r} = \Phi^{-1}\mathbf{e} + \frac{1}{6}\Phi^{-4}\left[(2-5\cos^2\varphi)\mathbf{e} - 2\sin\varphi\,\mathbf{\Omega}\right] + o(\Phi^{-7})\,, \tag{24}$$

where

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi\end{pmatrix} \tag{25}$$

is the unit vector parameterized by the Roche stellar latitude $\varphi = q_2$ and longitude $\lambda = q_3$ ($\mathbf{e}$ is tangent to coordinate lines φ, λ = const. at $r \to 0$; $\mathbf{\Omega} = \mathbf{e}(\varphi = \pi/2)$). The metric coefficients are given by

$$h_1 = \Phi^{-2}\left(1 - 2\Phi^{-3}\cos^2\varphi + o(\Phi^{-6})\right) \tag{26}$$

$$h_2 = \Phi^{-1}\left(1 + \frac{1}{6}\Phi^{-3}[2-7\cos^2\varphi] + o(\Phi^{-6})\right) \tag{27}$$

$$h_3 = \Phi^{-1}\cos\varphi\left(1 + \frac{1}{6}\Phi^{-3}[2-5\cos^2\varphi] + o(\Phi^{-6})\right)\,, \tag{28}$$

hence the curvature of equipotential surface reads

$$\frac{1}{\rho} = -\Phi\left(1 + \Phi^{-3}\sin^2\varphi + o(\Phi^{-6})\right)\,. \tag{29}$$

According to Eq. (13), the radial component of the radiative flow is given by

$$H = -\alpha^{-1}\Phi^2(1 + 2\Phi^{-3}\cos^2\varphi)\frac{\partial(fJ)}{\partial\Phi} + \\ + \alpha^{-1}\Phi(1 + \Phi^{-3}\sin^2\varphi)(3f-1)J\,, \tag{30}$$

which, in the approximation of unperturbed spherical symmetry of the star, reduces to the standard spherical form

$$\bar{H} = -\alpha^{-1}\left(\Phi^2\frac{\partial(f\bar{J})}{\partial\Phi} - \Phi(3f-1)\bar{J}\right)\,, \tag{31}$$

valid even for any nonspherical solution. Only if the unperturbed mean intensity $\bar{J}$ is also spherically symmetric, this radial flow obeys the law of conservation in its simple form

$$\bar{H} = \Phi^2\frac{\bar{H}_s}{\Phi_s^2}\,, \tag{32}$$

where $\bar{H}_s$ is the unperturbed flow at the surface $\Phi = \Phi_s$. The general perturbation of Eq. (31) reads

$$\delta H = -\frac{2}{\alpha\Phi}\cos^2\varphi\frac{\partial(f\bar{J})}{\partial\Phi} + \frac{1}{\alpha\Phi^2}\sin^2\varphi(3f-1)\bar{J} - \\ -\alpha^{-1}\Phi^2\frac{\partial(f\delta J)}{\partial\Phi} + \alpha^{-1}\Phi(3f-1)\delta J\,. \tag{33}$$

In the same way, the meridional component of the radiative flux is given by

$$M = -\frac{\Phi}{3\alpha}\left(1 - \frac{1}{6}\Phi^{-3}[2-7\cos^2\varphi]\right)\frac{\partial J}{\partial\varphi} + \\ + \frac{5}{3\alpha\Phi^2}\sin 2\varphi(3f-1)J\,, \tag{34}$$

1992A&A...256..519H

consequently the equation (19) for the general solution of J can be now written down explicitly as

$$\Phi^2\alpha\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{1}{\alpha}(1+\frac{2}{3}\Phi^{-3})\left[\frac{\partial}{\partial\Phi}(3fJ)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-3\frac{3f-1}{\Phi}(1+\Phi^{-3}[1-3\cos^2\varphi])J\right]\right)+$$
$$+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\left[(1-\frac{5}{3}\Phi^{-3}\cos^2\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}J-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{5(3f-1)}{\Phi^3}\sin 2\varphi J\right]\right)=0\,, \tag{35}$$

and the unperturbed equation (20) reads

$$\Phi^2\alpha\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\Phi}(3f\bar{J})-3\frac{3f-1}{\Phi}\bar{J}\right]\right)+$$
$$+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\bar{J}\right)=0\,. \tag{36}$$

After separation of variables (21) we obtain the equation

$$\Phi^2\alpha\frac{d}{d\Phi}\left(\frac{1}{\alpha}\left[\frac{d}{d\Phi}(3fR_n)-3\frac{3f-1}{\Phi}R_n\right]\right)-n(n+1)R_n=0 \tag{37}$$

for the radial part $R_n(\Phi)$. Its solution depends on the particular model of $\alpha=\alpha(\Phi)$. For simplicity, let us adopt the model used by Hummer & Rybicki (1971)

$$\alpha=C(-\Phi)^{\kappa} \qquad \text{for} \qquad \Phi<\Phi_s<-\frac{3}{2}\,. \tag{38}$$

The general asymptotic solution (i.e. the solution valid in deep layers, where $f\simeq\frac{1}{3}$) of Eq. (37) can then be written in the form

$$R_{n\pm}\simeq\left(\frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{a_{n\pm}}\,, \tag{39}$$

where

$$a_{n\pm}=\frac{\kappa+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2+n(n+1)}\,. \tag{40}$$

As the unperturbed solution we will choose the isotropic one ($n=0$, see Fig. 2)

$$\bar{J}=\bar{j}_{0-}R_{0-}+\bar{j}_{0+}R_{0+}\,, \tag{41}$$

so that Eq. (32) will be valid. This solution behaves asymptotically as

$$\bar{J}\simeq\bar{j}_{0-}+\bar{j}_{0+}\left(\frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{\kappa+1}\,, \tag{42}$$

consequently, the constant

$$\bar{j}_{0+}=\frac{3C}{\kappa+1}(-\Phi_s)^{\kappa-1}\bar{H}_s\,, \tag{43}$$

while $\bar{j}_{0-}$ is given by the boundary conditions at the surface. It can be easily verified, that (in good agreement with numerical results) the Eddington factor is asymptotically

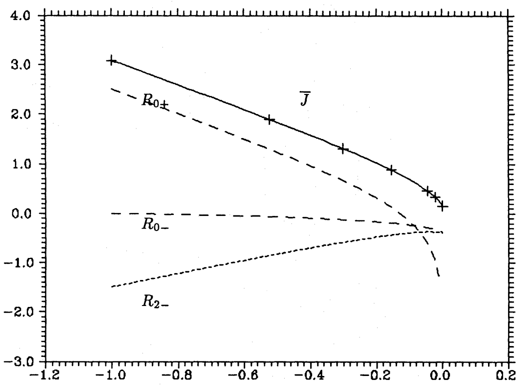


Fig. 2. The dependence of $\log(\bar{J})$ on $\log(\Phi/\Phi_s)$ for $\kappa=1.5$ (full line). $\Phi_s=-3$ and $C=1.826$ were chosen to correspond to the radius of atmosphere $R=0.1$ in the dimensionless units introduced by Hummer & Rybicki (1971). Their values of $\bar{J}$ are plotted by crosses. Dashed lines give $R_{0\pm}$, the dotted line gives R_{2-}

$$f\simeq\frac{1}{3}+\frac{2}{15\bar{J}}\frac{d^2\bar{J}}{d\tau^2}\simeq\frac{1}{3}+\frac{4(\kappa+1)}{15C^2}(-\Phi)^{2-2\kappa}\,. \tag{44}$$

For $n>0$ we get from Eq. (37) pairs of higher multipole solutions; one of them diverging and the other vanishing for $\Phi\to-\infty$ (with the power increasing with n). The former describes the scattering of light radiated from an anisotropic source in the center of the star, the latter corresponds to the absorption of an external radiation.

Following Eq. (35), Eq. (22) for the perturbation δJ reads now

$$\Phi^2\alpha\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial(3f\delta J)}{\partial\Phi}-3\frac{3f-1}{\Phi}\delta J\right]\right)+$$
$$+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\delta J\right)= \tag{45}$$
$$=-\Phi^2\alpha\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{1}{\alpha\Phi^3}\left[\frac{d(2f\bar{J})}{d\Phi}+(4-9\sin^2\varphi)\frac{3f-1}{\Phi}\bar{J}\right]\right)+$$
$$+10(1-3\sin^2\varphi)\Phi^{-3}(3f-1)\bar{J}\,.$$

Any particular solution of this equation contains a quadrupole component ($\sim P_2(\sin\varphi)$) in the photosphere, where $f>\frac{1}{3}$. Let us suppose this solution to be in the form

$$\delta J=\sum_n \delta j_n(\Phi)R_n(\Phi)P_n(\sin\varphi)\,. \tag{46}$$

The following set of equations for variations of constants δj_n can be then obtained from Eq. (45)

$$\delta j_0''+\left[2\frac{(fR_0)'}{fR_0}-\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{3f-1}{f\Phi}\right]\delta j_0' = F_0 \tag{47}$$

$$\delta j_2''+\left[2\frac{(fR_2)'}{fR_2}-\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{3f-1}{f\Phi}\right]\delta j_2' = F_2\,, \tag{48}$$

where $'$ means $d/d\Phi$ and $F_n(\Phi)$ is an abbreviation for the right hand side, which can be obtained from the unperturbed solution

$\bar J$ using the relations (31) and (32) in the form

$$F_0 = -\frac{\alpha}{fR_0}\left(\frac{\Phi^{-3}}{3\alpha}[(2f\bar J)' + \frac{3f-1}{\Phi}\bar J]\right)' = \tag{49}$$
$$= \frac{\alpha}{R_0}\left(\frac{1-f^{-1}}{f\Phi^4}\frac{\bar H_s}{\Phi_s^2} - \left[\left(\frac{3-f^{-1}}{\alpha\Phi^4}\right)' + \frac{(3-f^{-1})^2}{\alpha\Phi^5}\right]\bar J\right)$$

$$F_2 = \frac{\alpha}{fR_2}\left(2\frac{3f-1}{\alpha\Phi^4}\bar J\right)' - 20\frac{3f-1}{3fR_2\Phi^5}\bar J = \tag{50}$$
$$= 2\frac{\alpha}{R_2}\frac{f^{-1}-3}{f\Phi^4}\frac{\bar H_s}{\Phi_s^2} +$$
$$+2\frac{\alpha}{R_2}\left[\left(\frac{3-f^{-1}}{\alpha\Phi^4}\right)' - \frac{(3-f^{-1})(3f^{-1}+1)}{3\alpha\Phi^5}\right]\bar J\,.$$

Their solutions

$$\delta j_n(\Phi) = \int\frac{\int F_n G_n d\Phi}{G_n}d\Phi\,, \tag{51}$$

where

$$G_n(\Phi) = \frac{f^2R_n^2}{\alpha}\exp\left(-\int\frac{3f-1}{f\Phi}d\Phi\right)\,, \tag{52}$$

give the dependence of isotropic and quadrupole terms of δJ on Φ, which is plotted in Fig. 3. Its asymptotic behaviour reads

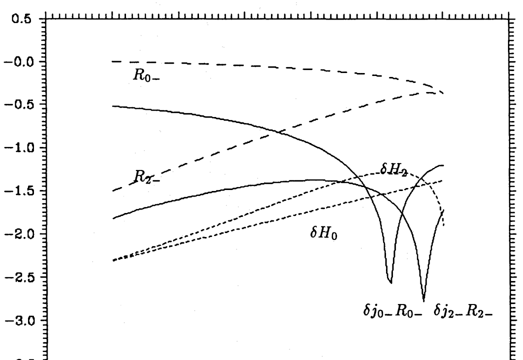


Fig. 3. The dependence of $\log(|\delta j_0 R_0|)$ and $\log(|\delta j_2 R_2|)$ (full lines) and δH_0 and δH_2 (dotted lines) on $\log(\Phi/\Phi_s)$ for $\kappa = 1.5$, $\Phi_s = -3$ and $C = 1.826$. The apparent singularities (in the logarithmic scale) of $\delta j_{0,2-}$ are caused by their change of sign; the isotropic parts ("$_0$") of both δJ and δH are negative and quadrupole parts ("$_2$") of both are positive at the surface. Dashed lines give R_{0-} and R_{2-}

$$\delta J \simeq \frac{2C\bar H_s}{(\kappa-2)\Phi_s^2}(-\Phi)^{\kappa-2} + \overline{\delta j}_{0-} + \overline{\delta j}_{0+}\left(\frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{\kappa+1} + \tag{53}$$
$$+\left[\overline{\delta j}_{2-}\left(\frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{a_{2-}} + \overline{\delta j}_{2+}\left(\frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{a_{2+}}\right]P_2(\sin\varphi)\,,$$

where the first term on the right hand side corresponds to the stratification of the equipotentials due to the mean centrifugal force, the other terms correspond to variations $\overline{\delta j}_{n\pm}$ of constants $\bar j_{n\pm}$. Like the values of $\bar j_{0\pm}$ in the unperturbed solution (41), the constants $\overline{\delta j}_{n\pm}$ are determined by the initial conditions as well.

First, it is obvious that the constants $\overline{\delta j}_{n+}$ must be chosen equal to zero, because otherwise they would change (according to Eq. (13)) the asymptotic behaviour of radiative flow.

Second, the boundary condition $I(\mu < 0, \tau = 0) = 0$ of no incident radiation at the surface of the star is reflected by a relation between initial conditions for the moments $M_r^k(\Phi = \Phi_s)$ (e.g. by the zero value $q(\tau = 0) = 1/\sqrt{3}$ of the Hopf function $q = J/3H$ for the plane-parallel gray atmosphere). Let us assume, for the sake of simplicity, that this relation (obtained for the unperturbed solution) is not violated by the perturbation, i.e.

$$\delta J_s \bar H_s = \delta H_s \bar J_s \tag{54}$$

for all φ. Following Eq. (33) the initial conditions for δj_{n-} thus read

$$\left[\delta j_{0-}R_{0-}\frac{d(f\bar J)}{d\Phi} - \bar J\frac{d(f\delta j_{0-}R_{0-})}{d\Phi}\right]_{\Phi=\Phi_s} = \tag{55}$$
$$= \left[\frac{\bar J}{\Phi^3}\left(\frac{4}{3}\frac{d(f\bar J)}{d\Phi} - \frac{3f-1}{3\Phi}\bar J\right)\right]_{\Phi=\Phi_s}$$

$$\left[\delta j_{2-}R_{2-}\frac{d(f\bar J)}{d\Phi} - \bar J\frac{d(f\delta j_{2-}R_{2-})}{d\Phi}\right]_{\Phi=\Phi_s} = \tag{56}$$
$$= -\left[\frac{\bar J}{\Phi^3}\left(\frac{4}{3}\frac{d(f\bar J)}{d\Phi} + 2\frac{3f-1}{3\Phi}\bar J\right)\right]_{\Phi=\Phi_s}\,.$$

Let us remind that, according to von Zeipel's theorem, the radiative flow at the surface H_{vZ} should be proportional to the gravity acceleration, i. e.

$$H_{vZ} \sim \frac{d\Phi}{dr} = h_1^{-1} \sim \left(1 + \frac{4}{3}\Phi_s^{-3}[1 - P_2(\sin\varphi)]\right)\,. \tag{57}$$

4. Conclusion

The variation δH_s of the flow obtained from the above given solution of two-dimensional radiative transfer can be compared to the von Zeipel approximation. The isotropic part of this variation does not differ significantly for both approximations, which is natural because it is caused by the increase of the surface area. However, the quadrupole part, plotted in Fig. 4, is significantly decreased in cases of highly oblated stars (Φ_s approaching its critical value) and extended atmospheres (geometrical thickness comparable to the star radius). This is a qualitative confirmation of results found by Pustylnik (1970). Note, that this effect is quantitatively very sensitive to the vertical structure of the opacity. As far as the geometrical thickness of optically thin layers is dependent on the wavelength of the light, the monochromatic darkening can be also a very complicated function of the wavelength in a realistic non-gray atmosphere. The classical concept of gravity darkening is not thus acceptable for geometrically thick atmospheres. This is also why (unlike e.g. the study of reflection effect in plane-parallel atmosphere by Vaz & Nordlund, 1985) any practical application of the theory presented here will be only possible in connection with a non-gray model of the atmosphere. However, this effect can influence the theoretical rotational line profiles as calculated by Collins (1974) and consequently also the determinations of rotational velocities (see e.g. Slettebak & Collins, 1975).

1992A&A...256..519H

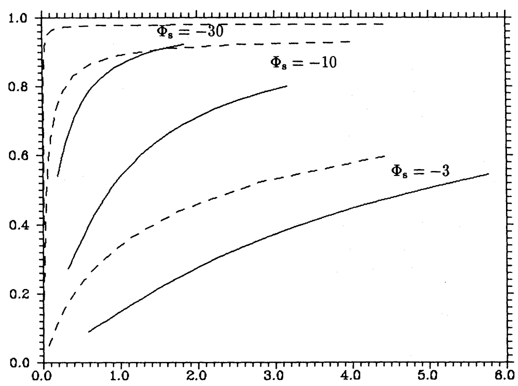


Fig. 4. The ratio $\delta H_{2,s}/\delta H_{2,vZ}$ of variations of the radiative flux according to the solution of two-dimensional radiative transfer and the von-Zeipel's approximation plotted as a function of C for $\kappa = 1.5$ (full lines) and $\kappa = 3.$ (dashed lines) and $\Phi_s = -3, -10$ and -30.

Acknowledgements. The author is grateful to Drs. M. B. El-Shaarawy, M. Macháček and P. Harmanec for inspiring discussions.

References

Collins II. G. W., 1974, ApJ 191, 157

Hadrava P., 1974, Models of atmospheres of early-type stars, Thesis, Charles University, Prague (in Czech)

Hadrava P., 1981, Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. N. 57, 7

Hadrava P., 1987a, Ap&SS 138, 61

Hadrava P., 1987b, Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. N. 70, 263

Hadrava P., 1988, Publ. des Astrophys. Obs. zu Potsdam N. 114, Band 33, Heft 2, 11

Hummer D. G., Rybicki G. B., 1971, MNRAS 152, 1

Kopal Z., 1989, The Roche Problem, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London

Kopal Z., Ali A. K. M. S., 1971, Ap&SS 11, 423

Pustylnik I., 1970, Izvestia AN ESSR, 19, 428

Slettebak A., Collins II. G. W., 1975, ApJS 29, 137

Tassoul J. L., 1978, Theory of Rotating Stars, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

Vaz, L. P. R., Nordlund Å., 1985, A&A 147, 281

This article was processed by the author using Springer-Verlag LaTeX A&A style file 1990.

Astron. Astrophys. 257, 218 (1992)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

Research Note

Reflection with limb darkening

P. Hadrava

Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, 251 65 Ondřejov, Czechoslovakia

Received November 29, accepted December 23, 1991

Abstract. Corrected analytical expression for the reflection effect in binaries is given for the case of reradiation with linear limb darkening.

Key words: reflection effect – limb darkening – symbiotic stars

1. Introduction

The heating of stellar atmosphere by the light from a companion star can influence significantly its structure and consequently also the spectral and angular distribution of its overal radiation. The problem of the reflection effect is thus very complicated and should be treated in a way otlined by Vaz and Nordlund (1985, 1990). Notwithstanding, a simple approximate estimate of the reflection effect can be useful for understanding the observed light curves, especially if no high accuracy is needed like in the case of symbiotic stars where the circumstellar matter contributes significantly to the total luminosity. Corresponding formula has been published by Formiggini and Leibowitz (1990), but unfortunately there is an error in its derivation. Since this erroneous formula has sometimes been used by other investigators, it is the aim of the present note to present it in its correct form and to estimate the numerical differences between both formulas.

2. The reflection function

Let us introduce spherical coordinates $\{R, \vartheta, \varphi\}$ on the illuminated star, with the pole $\vartheta = 0$ in the direction toward the companion star and the main meridian $\varphi = 0$ in the plane defined by the instantaneous direction toward the observer (whose pole distance is $\vartheta = \varepsilon$).

A surface element

$$d^2\sigma = R^2 d\varphi\, d\cos\vartheta \tag{1}$$

will be seen by the observer under the angle γ, where

$$\cos\gamma = \cos\varepsilon\cos\vartheta + \sin\varepsilon\sin\vartheta\cos\varphi\,. \tag{2}$$

If the distance to the companion $r \gg R$, the element is illuminated by flux $I_0\cos\vartheta$, where I_0 is the incident intensity and ϑ is the zenith distance of the companion at the given point of the stellar disc. Let us suppose, that this flux is partly (with the effective albedo k) reradiated with the limb darkening u. The surface intensity is increased by

$$\Delta I(\cos\gamma) = \Delta I_1 .\, (1 - u + u\cos\gamma) \tag{3}$$

and the outward flux by

$$\Delta F = \int_0^1 \Delta I \cos\gamma\, d\cos\gamma = \Delta I_1 \frac{3-u}{6} = k I_0 \cos\vartheta\,. \tag{4}$$

The apparent luminosity will then be increased by

$$\begin{aligned}\Delta L &= \int \Delta I \cos\gamma\, d^2\sigma = \\ &= \frac{6kI_0R^2}{3-u}\int_\Omega \cos\vartheta\cos\gamma\,(1-u+u\cos\gamma) d\varphi\, d\cos\vartheta\,,\end{aligned} \tag{5}$$

where the solid angle Ω corresponds to the part of the illuminated hemisphere ($\cos\vartheta \geq 0$) which is visible by the observer ($\cos\gamma \geq 0$), i.e. $\varphi \in (-\varphi_0(\vartheta;\varepsilon), \varphi_0(\vartheta;\varepsilon))$, where

$$\begin{aligned}\varphi_0(\vartheta;\varepsilon) &= \pi & \text{for } \vartheta \leq \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon \\ &= \arccos(-\mathrm{ctg}\varepsilon\,\mathrm{ctg}\vartheta) & \text{for } \vartheta \geq |\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon|\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Inserting Eq. (2) into Eq. (5), the final formula reads

$$\begin{aligned}\Delta L &= \frac{4kI_0R^2}{3-u} \\ &\left[(1-u)(\sin\varepsilon + (\pi-\varepsilon)\cos\varepsilon) + \frac{3u\pi}{16}(1+\cos\varepsilon)^2\right]\,.\end{aligned} \tag{7}$$

As far as the term $\cos\gamma$ has been omitted in Eq. (5) by Formiggini and Leibowitz (1990), their reflection with coefficient $\mu = 1$ actually corresponds to the zero limb darkening $u = 0$, while their case $\mu = 0$ would correspond to a reflection $\Delta I \sim \cos^{-1}\gamma$. Several numerical values of $\Delta L(\varepsilon)$ for all three cases (and $kI_0R^2 = 1$) are given in the following table.

ε	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$u = 1$	4.712	4.102	2.651	1.178	0.295	0.021	0
$u = 0$	4.189	3.690	2.551	1.333	0.457	0.062	0
$\cos^{-1}\gamma$	3.142	2.931	2.356	1.571	0.785	0.210	0

References

Formiggini, L., Leibowitz E. M. 1990, A&A 227, 121
Nordlund, Å., Vaz, L. P. R., 1990, A&A 228, 231
Vaz, L. P. R., Nordlund Å., 1985, A&A 147, 281

This article was processed by the author using Springer-Verlag LaTeX A&A style file 1990.

ASTRONOMY & ASTROPHYSICS
SUPPLEMENT SERIES
DECEMBER I **1995**, PAGE 393

Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **114,** 393-396 (1995)

Orbital elements of multiple spectroscopic stars

P. Hadrava

Astronomical Institute, Academy of Sciences of the Czech Republic, 251 65 Ondřejov, Czech Republic

Received March 30, 1995; accepted April 26, 1995

Abstract. — A method for simultaneous decomposition of spectra of binary and multiple stars and the solution of orbital elements is described.

Key words: stars: binaries spectroscopic — methods: numerical

1. Introduction

Since the discovery of binary stars, systematic observations of binaries and multiple stars and determination of their orbits has played a crucial role in quantitative testing of theories of stellar structure and evolution. The classical methods of observation of visual, eclipsing and spectroscopic binaries have been complemented by methods of interferometry, polarimetry and detailed analysis of stellar spectra. However, because the range of applicability of each method is partly different, it is useful to combine them in order to achieve consistent and complex information on systems under study.

In view of this basic philosophy, the code FOTEL was developed by the author at Ondřejov observatory to solve light curves (i.e. to get '**pho**tometric **el**ements' including the orbital ones) using the complementary information contained in radial-velocity curves (Hadrava 1990; for detailed information see the manual accessible together with the code by FTP at directory `/ftp/pub/fotel` at `SUNSTEL.ASU.CAS.CZ`). The release 2 of the code is based on a relatively simple physical model to enable handling with extensive data files. Owing to its flexibility, it proved to be a useful tool even for pure radial-velocity data, despite its main purpose – the solution of light curves – makes the code more complicated than it could be for simple solution of RV-curves (see e.g. Mayer et al. 1991).

One general problem of the solution of orbital elements via the radial-velocity curves is that the lines corresponding to the component stars must be well resolved. For binaries with two spectra visible, consisting of stars of close spectral types (and comparable magnitudes), this is possible only in extremes of radial velocities, while the data points close to the system velocity are unreliable due to the blending of the lines. Just these points can be important for determination of the eccentricity and periastron longitude. Systematic errors can appear in binaries with only one spectrum distinguished if lines of the secondary star are hidden in the line profiles of the primary. The situation is even worse if also lines of a third star are present. Moreover, the spectral resolution of composite spectra depends on the dispersion of the spectrograph, on the quality of the detector and signal to noise of each exposure. These problems are more pronounced in early type stars whose line profiles are usually broadened by rapid rotation (Schönberner & Harmanec 1995).

It is clear that even in the case of blended lines information on the radial velocities of the component stars is contained in the line profile. To get this information it is possible to use the cross-correlation technique comparing the observed spectrum with masks similar to expected spectra of the components. These can be obtained either from reference stars of similar types or from model spectra. The value of this approach is well known from the fine results achieved (see e.g. Simkin 1973; Hill 1993). However, to choose an appropriate mask can be a problem if the lines of two or more stars are blended in all phases. On the other hand, it is clear that the best mask would be the spectrum of the star itself (provided it does not change with the phase) and it should be possible to obtain it comparing profiles in different phases.

A method comparing the profiles at different phases is the 'disentangling' by singular value decomposition (Simon & Sturm 1994), which solves for the spectra of components from a huge sparse system of linear equations with several observed spectra on the right hand side.

An alternative method of disentangling which employs the Fourier transform (like in the correlation technique) is presented in this paper. This method can be used as the first step in the standard procedure of determination of radial velocities from each exposure. A by-product of this data processing are the mean (from all exposures) spectra of individual binary components, which can be used for a detailed spectroscopic analysis. An advantage of this method is that all lines in the spectra are used for radial-velocity determination even if their identification is not clear (certainly, this can turn into disadvantage if variable features which do not follow the velocity of the star are present in the spectra). The velocities obtained in the first step can then be fitted by radial-velocity curves in a classical way (e.g. by FOTEL). However, in the 'pure' cases when the radial velocities should be given by a known law e.g. of orbital motion (i.e. if there is no distortion due to circumstellar matter or other effects) the intermediate stage of determination of independent radial velocities from individual exposures complicates the task of spectra disentangling. For these cases the method can fit directly the orbital elements from the observed spectra and to yield the mean component spectra with a smaller number of free parameters.

The mathematical principle of the method described in Sect. 2 is based on the least-squares fitting of transformed spectra combining direct analytical calculation of linear coefficients with optimization in nonlinear ones. This combined optimization (also used in FOTEL) of component spectra and orbital elements is performed in the code KOREL which is complementary to FOTEL and uses similar inputs – see Sect. 3. An example and concluding remarks are given in Sect. 4. A detailed analysis of real data will be presented in subsequent papers.

2. Disentangling of composite spectra through the Fourier transform

Let the observed spectrum $I(x,t)$ be composed of spectra $I_j(x)|_{j=1}^{n}$ of n stars, each one Doppler shifted according to the instantaneous radial velocity $v_j(t)$ of the star j at the time t. Suppose the spectra of individual stars have no intrinsic variability. If the variable x is chosen to be logarithmic in wavelength, $x = c\ln(\lambda)$, then (for $v_j(t) \ll c$) the composed spectrum is given by convolution in x

$$I(x,t) = \sum_{j=1}^{n} I_j(x) * \delta(x - v_j(t)) \; . \qquad (1)$$

The Fourier transform ($x \to y$) of this equation reads

$$\tilde{I}(y,t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(y) \exp(iyv_j(t)) \; . \qquad (2)$$

If we have k spectra ($k > n$) observed at $t_l|_{l=1}^{k}$ corresponding to various values of $v_j(t_l)$, we can – in principle – fit them searching for appropriate values of $v_j(t_l)$ and $\tilde{I}_j(y)$. The velocities $v_j(t_l)$ can be treated either as independent values, or to be given functions of time and certain parameters p, e.g. the orbital elements of the spectroscopic binary. Using the standard method of least squares we arrive at the condition

$$0 = \delta S \; , \qquad (3)$$

where

$$S = \sum_{l=1}^{k} \int f_l(y) \left| \tilde{I}(y,t_l) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(y) \exp(iyv_j(t_l;p)) \right|^2 \mathrm{d}y \; , \qquad (4)$$

and the functions $f_l(y)$ can be chosen to give the weights of different Fourier modes of the individual spectra. Because S is bilinear in $\tilde{I}_j(y)$ the conditions obtained for them from Eq. (3) are linear equations

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{k} f_l(y) \exp(iy(v_j(t_l;p) - v_m(t_l;p))) \right] \tilde{I}_j(y) = $$
$$= \sum_{l=1}^{k} f_l(y) \exp(-iyv_m(t_l;p)) \tilde{I}(y,t_l) \qquad (5)$$

($m = 1, ..., n$), independent for each y. Just this independence of Fourier components, which is the consequence of the form of Eq. (2) local in the variable y (unlike the form of Eq. (1) integral in the variable x), makes the disentangling of the observed spectra easier in Fourier transform then in the wavelength space. Solving this system of equations for each y and substituting $\tilde{I}_j(y)$ into Eq. (4), S can be optimized only with respect to parameters either $v_j(t_l)$ or p.

It is obvious that Eq. (5) is singular for $y = 0$. This corresponds to the fact that the contributions of individual stars to the constant term of $I(x)$ cannot be distinguished. The continua of stars are almost constant and in practice unaffected by the Doppler shift. Consequently, a large error of $\tilde{I}_j(y)$ can be expected for small values of y. It can thus be convenient to cut-off this range of y choosing here $f_l = 0$.

3. Numerical method

The Fourier transform is calculated by FFT (in 256 points in the present version of the code KOREL). The δ-function in Eq. (1) must be discrete with the sampling frequency (to give in Eq. (1) function $\exp(iyv_j(t))$ periodic). Consequently, both $v_j(t)$ and S are step functions (in t and p, resp.). To achieve a good resolution in velocity, it can be thus advantageous to interpolate the input spectra into higher sampling density then is the original one read from the detector. The Fourier transform of these spectra must be stored in the computer memory in the course of the solution. To enable the use of large number of spectra with high resolution, the spectra can be represented by several spectral regions only (containing spectral lines chosen for the solution), each one characterized by the initial wavelength and step in radial velocity per one bin. For each spectral region the function S is given by Eq. (4) and the corresponding sets of Eqs. (5) are independent. The total S summed over spectral regions is calculated only for the purpose of convergence of parameters p.

The spectra are supposed to originate from a multiple stellar system with a hierarchical structure shown in Fig. 1, where the numbers in circles are indexes of the star position, numbers in parenthesis give indexes of the corresponding orbit. The occupation of each position by a visible component is to be given by special key on input. The orbits Nos. 1, 2 and 3 can be suppressed by the choice of the corresponding period equal to 0. The radial velocity

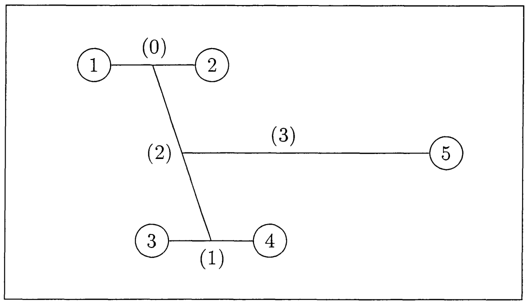


Fig. 1. The structure of the stellar system

of a component is thus given by

$$\mathrm{RV} = \sum_{o} K(\cos(\omega + v) + e\cos\omega)\ , \qquad (6)$$

where the summation is performed over the orbits influencing the motion of the star (e.g. orbits Nos. 0, 2 and 3 for the star No. 1; note that the γ-velocity of the system does not appear in this formula – it can be specified only after the identification of lines in the component spectra). The true anomaly v is calculated from the solution of the Kepler's equation for the time t corrected by

$$\Delta t = \sum_{o} \frac{PK}{2\pi c}(1 - e^2)^{3/2}\frac{\sin(\omega + v)}{1 + e\cos(v)}\ , \qquad (7)$$

for the light-time effect due to the higher orbits in the hierarchical system (e.g. Nos. 2 and 3 for stars Nos. 1 and 2). The spectra and times of exposures are usually transformed into the heliocentric system. If not, the higher orbit can be used to make the corresponding correction. The secondary component of this 'solar' orbit can be used to get the telluric lines away (in an approximation) from the stellar spectra.

The minimization of S with respect to p is performed by the simplex method adapted from Kallrath & Linnel (1987). Several orbital elements (up to 10) can be chosen from all of them (i.e. period $P = p_{1+10o}$, time of the pericenter passage $t = p_{2+10o}$, eccentricity $e = p_{3+10o}$, pericenter longitude $\omega = p_{4+10o}$, K-velocity $K = p_{5+10o}$ of the primary, i.e. of the component(s) with lower index, and mass ratio of secondary over primary $q = p_{6+10o}$ for each orbit o) for convergence in one step, the other being fixed.

4. Results

As an example, the solution of simulated data for a binary star is plotted in Fig. 2. The natural line profiles with cen-

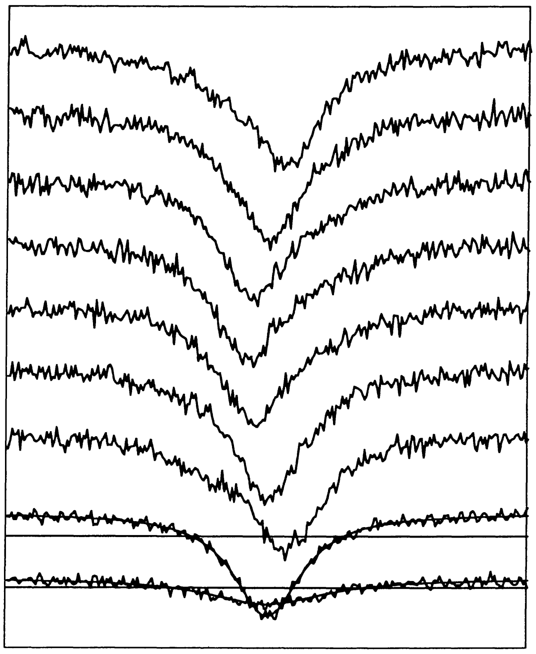


Fig. 2. Simulated composite line profiles (7 upper curves) of a binary and the solution of their disentangling superposed on the input profiles (bottom 2 curves)

tral intensities in ratio 4:1 and semi-widths corresponding to radial velocities 20 and 35 km/s are assumed for the primary and secondary, respectively. Profiles calculated (for sampling step 2 km/s) for several phases of circular orbit with $K_1 = 22$ and $K_2 = 44$ km/s (with an artificial noise) are apparently single peaked with a variable asymmetry. However, starting from $K_1 = 10$ km/s (other elements – including the mass ratio – fixed to their correct values), the above described procedure arrives (in a few minutes on PC 286) back to value $K_1 = 22.17$ km/s in 5 steps of the simplex minimization and reproduces well the profiles of both components.

Two warnings should be kept in mind of a user of this method. First, the minimization of S with respect to orbital parameters p is performed by a type of local search. Consequently, the solution can be dependent on the initial conditions and need not be necessarily the best solution (it can be a local instead of the global minimum of S). A use of information from other sources (e.g. period obtained from photometry) can significantly help not only to save the computational time but also to get the proper solution. Second, even the best solution need not be necessarily a good solution! Both the solution of light- and RV- curves by FOTEL and solution of composite spectra and orbital parameters by KOREL fits the input data by the implicitly included model as well as possible, but cannot guarantee that this model is correct. Another model can fit the same data as well or even better. For instance, similar variable asymmetry of a line profile as seen in Fig. 2 can result also from a rotation of a star with inhomogeneities on its surface or of its pulsations. A correspondence of the component spectra obtained by the disentangling with synthetic spectra resulting from model atmospheres can be used as an evidence of plausibility of the multiple-star model for a particular object. Generally, consistency of all the observational results should be verified in a study of the object. This is also why the application of the present method to a real data will be demonstrated in a subsequent paper. Preliminary results from such calculations seems to be promising.

Acknowledgements. The author is grateful to Petr Harmanec for permanent encouraging and overwhelming criticism. Discussions with all colleagues from the Ondřejov stellar department were highly inspiring. This work has been supported by the internal grant No. 303401 of the Academy of Sciences and the grant 205/94/0025 of the Grant Agency of the Czech Republic.

References

Hadrava P., 1990, Contrib. Astron. Obs. Skal. Pl. 20, 23
Hill G., 1993, in New Frontiers in Binary Stars Research. In: Leung K.-C., Nhu I.-C. (eds.), Astron. Soc. Pac. Conf. Ser. vol. 38, 127
Kallrath J., Linnel A. P., 1987, ApJ 313, 346
Mayer P., Hadrava P., Harmanec P., Chochol D., 1991, BAIC 42, 230
Simkin S. M., 1973, A&A 31, 129
Simon K. P., Sturm E., 1994, A&A 281, 286
Schönberner D., Harmanec P., 1995, A&A 294, 509

ASTRONOMY & ASTROPHYSICS
SUPPLEMENT SERIES

MAY I **1997**, PAGE 581

Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **122,** 581-584 (1997)

Relative line photometry of eclipsing binaries

P. Hadrava

Astronomical Institute, Academy of Sciences of the Czech Republic, 251 65 Ondřejov, Czech Republic
had@sunstel.asu.cas.cz

Received May 20; Accepted August 21, 1996

Abstract. A new method of "line-photometry" using the changes of line intensities for determination of light curves in eclipsing binaries is described. This method is based on a generalization of the method of spectrum decomposition by Fourier transform performed by the code KOREL for spectrum disentangling.

Key words: line profiles — stars: binaries spectroscopic — methods: numerical

1. Introduction

A new method for spectrum disentangling (introduced first by Simon & Sturm 1994) which is based on the least square fit of power spectra of line profiles was recently described in Paper I (Hadrava 1995). This method proved to be a useful tool also for removing the telluric lines from the stellar spectra. Certainly, the variability of line intensities must be included for this purpose. This can be done simply by adding new free parameters specifying intensity multipliers for each exposure to the orbital elements solved by numerical minimization. However, this numerical solution is very time-consuming. It is thus more advantageous to solve for these multipliers in the way described in Sect. 2.

This generalized method has been included into a new version of the code KOREL for spectrum decomposition. Using this code to calculate the line intensities of binary components their relative change during eclipses was found (e.g. in the case of V436 Per, see Harmanec et al. 1997). This effect yields, in principle, a possibility to make photometric observations with a spectrograph. This method of "relative line photometry" is described in Sect. 3. In consequence, it enables also a decomposition of contributions of binary components to the continuum, which is otherwise indistinguishable by spectral disentangling.

A detailed description of the code KOREL is accessible by anonymous ftp on server "sunstel.asu.cas.cz" (147.231.104.100) in file pub/fotel/korel3.tex. The source file of the code is distributed by the author on request.

2. Decomposition of spectra with variable intensities

To generalize the method described in Paper I, let us suppose the observed spectrum $I(x,t)$ (the variable $x = c\ln(\lambda/\lambda_0)$ is proportional to logarithm of wavelength expressed in an arbitrary unit λ_0; cf. Simkin 1974) to be composed of spectra $I_j(x)|_{j=1}^{n}$ of n stars which have no intrinsic variability apart from an overall change of their intensities proportional to functions $s_j(t)$ which may be caused e.g., by ellipticity or eclipses of binary components or by air-mass or humidity for the telluric spectrum.

If the instantaneous radial velocity (of the star j at the time t) $v_j(t) \ll c$, the composite spectrum is given by the convolution in x

$$I(x,t) = \sum_{j=1}^{n} s_j(t) I_j(x) * \delta(x - v_j(t)) \ . \tag{1}$$

The Fourier transform ($x \to y$) of this equation reads

$$\tilde{I}(y,t) = \sum_{j=1}^{n} s_j(t) \tilde{I}_j(y) \exp(iyv_j(t)) \ . \tag{2}$$

If we have k spectra ($k > n$) observed at times $t_l|_{l=1}^{k}$ corresponding to various values of $v_j(t_l)$, we can – in principle – fit them by searching for appropriate values of $v_j(t_l)$, $s_{jl} \equiv s_j(t_l)$ and $\tilde{I}_j(y)$. The velocities $v_j(t_l)$ can be treated either as independent values, or to be given functions of time and certain parameters p, e.g. the orbital elements of the spectroscopic binary. Using the standard method of least squares we arrive at the condition

$$0 = \delta S \ , \tag{3}$$

where

$$S = \sum_{l=1}^{k} \int w_l(y) \Big| \tilde{I}(y,t_l) - \sum_{j=1}^{n} s_{jl} \tilde{I}_j(y) \exp(iyv_j(t_l;p)) \Big|^2 \mathrm{d}y \ . \tag{4}$$

Here $w_l(y)$ is the weight of each Fourier mode y in the exposure l. In practice, we suppose

$$w_l(y) = w_l w(y) \ . \tag{5}$$

The weight w_l of each exposure can be chosen e.g. in dependence on the number of photon counts. The function $w(y)$ can be introduced as a frequency filter, e.g. to cut off the low frequency modes influenced by the rectification of the spectra.

Because S is bilinear in $\tilde{I}_j(y)$, the conditions obtained for them from Eq. (3) varying with respect to $\delta\tilde{I}^*_m(y)$ (i.e. the variation of complex conjugate of $\tilde{I}_m(y)$) are linear equations

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{k} w_l(y) s_{jl} s_{ml} \exp(iy(v_j(t_l;p) - v_m(t_l;p))) \right]$$
$$\tilde{I}_j(y) = \sum_{l=1}^{k} w_l(y) s_{ml} \exp(-iyv_m(t_l;p)) \tilde{I}(y,t_l) \tag{6}$$

($m = 1, ..., n$), which are moreover independent for each y. Just this independence of Fourier components, which is the consequence of the form of Eq. (2) local in the variable y (unlike the form of Eq. (1) integral in the variable x), makes the disentangling of the observed spectra easier in Fourier transform than in the wavelength space. Solving this system of equations for each y and substituting $\tilde{I}_j(y)$ into Eq. (4), S can be optimized only with respect to other parameters, which are much less numerous.

It is obvious that Eq. (6) is singular for $y = 0$. This corresponds to the fact that the contributions of individual stars to the constant term of $I(x)$ cannot be directly distinguished. The continua of stars are almost constant and in practice unaffected by the Doppler shift. Consequently, a large error of $\tilde{I}_j(y)$ can be expected for small values of y. It can thus be convenient to cut-off this range of y choosing here $w(y) = 0$. An indirect method of distinguishing the contributions to the continuum is described in Sect. 3.

S is bilinear also in the coefficients s_{jl}. Hence, varying with respect to s_{ml}, we get the linear set of equations

$$\sum_{j=1}^{n} \Re$$
$$\left[\int w_l(y) \tilde{I}_j(y) \tilde{I}^*_m(y) \exp(iy(v_j(t_l;p) - v_m(t_l;p))) \mathrm{d}y \right] s_{jl}$$
$$= \Re \int w_l(y) \tilde{I}(y,t_l) \tilde{I}^*_m(y) \exp(-iyv_m(t_l;p)) \mathrm{d}y \tag{7}$$

for these coefficients. Because these coefficients are generally still quite numerous (but less than the Fourier modes of the component spectra), it is advantageous to solve for them directly from these equations before optimizing S with respect to either $v_j(t_l)$ or p, in which it is non-linear.

It is important to keep in mind that the solutions of orbital elements (or individual independent radial velocities), the decomposition of the spectrum and the solution of component intensities are inter-related and their self-consistent solution should be found. This can be achieved iteratively starting from some initial estimate of orbital parameters and line intensities. An inner loop solving successively Eq. (6) for $\tilde{I}_j(y)$ and then Eq. (7) for s_{jl} is used in KOREL, while the orbital parameters are solved in an outer loop by simplex method. Practical experience shows, that slower, but more stable convergence of some of coefficients s_{jl} can be advantageous to get a better initial estimate. A successive increasing of the number k of exposures can also help the convergence.

3. Relative line photometry

The above described method for calculation of line-intensity variations yields the possibility of finding differential magnitude changes between the components and also to determine the ratio of component continua in the case that the intensity variations are caused by some overall darkening of a component e.g. by an eclipse. Let in the "normal" state of a binary the intensities $I_{1,2}$ of components continua be normalized

$$I_1 + I_2 = 1 \ . \tag{8}$$

The intensities $L_{1,2}$ of lines of the components found by solution of Eq. (6) are expressed in ratio to this common continuum. If in another exposure the spectrum of component "1" is $z\times$ increased (or decreased if $z < 1$, see Fig. 1), then the decomposed line intensities of both components referred to the instantaneous common continuum will be changed by factors $s_{1,2}$ to values

$$s_1 L_1 = \frac{zL_1}{zI_1 + I_2} \tag{9}$$

$$s_2 L_2 = \frac{L_2}{zI_1 + I_2} \ . \tag{10}$$

Specially, in our example shown in Fig. 1, both components have central line intensities 50% of their individual continua. In the maximum (left panel) the primary is twice as bright as the secondary, hence the lines of primary and secondary have depths of $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{6}$ of the total observed continuum, respectively. Let in the primary eclipse (right panel) the intensity of the primary be decreased to $z = \frac{1}{4}$ -times its normal value. The absolute depth of the line of primary is then 4-times lower while that of the secondary is unchanged. However, in ratio to the total continuum, which is now one half of its maximum value, the depth of primary line is only twice lower, while the intensity of the secondary line is twice higher.

Solving Eqs. (9) and (10), the factor z can be simply expressed as

$$z = \frac{s_1}{s_2} \ , \tag{11}$$

and the ratio of continua intensities

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 - s_2}{s_1 - 1} \ . \tag{12}$$

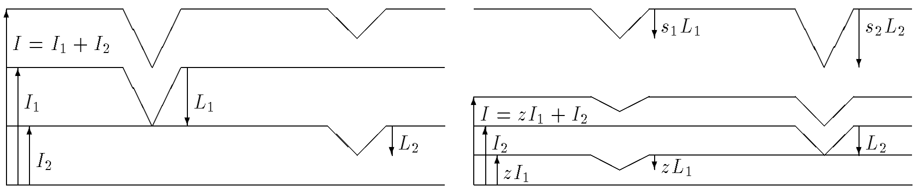


Fig. 1. Continuum and line intensities of uneclipsed components (left) and in the primary eclipse (right)

Obviously, if $z < 1$, then $s_1 < 1$ and $s_2 > 1$. This behavior can help to distinguish the variations caused by the "geometrical" reasons (or their equivalent) from intrinsic variations of line intensities of a component or from the observational noise.

In the usual case of k exposures, the factors $z_l|_{l=1}^k$ of the darkenings of the component "1" can be calculated independently for each exposure from $s_{jl}|_{j=1}^2$ according to Eq. (11). The ratio of continua intensities can be then obtained by least square fit of Eqs. (9) and (10) e.g. on a logarithmic (i.e. magnitude) scale, i.e. by solving the condition

$$0 = \delta F(I_1) \equiv \delta \sum_l \left[\ln s_{2l} + \ln(1 + I_1(z_l - 1))\right]^2 \tag{13}$$

for the variation δI_1, i.e. simply by numerical minimization of function $F(I_1)$. The differences of magnitudes of both components at the time of chosen exposure can be then expressed by

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log(zI_1/(1 - I_1)) \; . \tag{14}$$

If the secondary component is supposed to be constant during the primary eclipse, then the magnitude of the whole system is given by

$$m = -2.5 \log(1 + I_1(z - 1)) \; . \tag{15}$$

Vice versa, the total magnitude of the system in the course of secondary eclipse can be estimated by

$$m = -2.5 \log(I_1 + (1 - I_1)/z) \; . \tag{16}$$

The applicability of the method of relative line photometry in the above given approximation is certainly limited by the implicitly included assumptions that (i) the change of intensity is the same for the line and the continuum of the eclipsed component, (ii) the intensities of both component are constant outside their eclipses and (iii) that the shape of line profile is constant. The first assumption can be violated even in the case of a pure eclipse due to the limb darkening, which is different in the continuum and in the line. This problem will be studied in the next section. The second assumption is crucial to have well defined the "normal" state (in which $L_{1,2}$ are directly observed), so that the line-intensity of the non-eclipsed component can be used as a "comparison". This assumption can be violated e.g. for ellipsoidal variables. Obviously, a more sophisticated procedure (analogous to the light-curves solution) of fitting the observed values of $s_{1,2}$ (related to a reasonably chosen "reference" state of $L_{1,2}$) by a theoretical model can yield an additional information in such a case. Finally, the third assumption can be violated e.g. by Rossiter effect when different equatorial parts of a rotating star are eclipsed. This assumption is crucial for the disentangling according to Eq. (1). However, as far as the rotational broadening (even for a partially eclipsed component) is also given by a convolution in x, it is, in principle, possible to generalize the method of the disentangling and line photometry even to this case. On the other hand, such effects can be negligible in many cases not only for a pure eclipse, but in some approximation also for elliptic, reflecting or pulsating components of binaries.

4. Influence of limb darkening

Let us now investigate the influence of limb darkening on the line photometry. In the simple Milne-Eddington approximation of a plane-parallel atmosphere the observed specific intensity for direction cosine μ is given by

$$I(\mu,\nu) = \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right) \frac{\mathrm{d}\tau_\nu}{\mu} \; . \tag{17}$$

The source-function can be taken constant within the line-profile and approximately linear in a mean (e.g. Rosseland) optical depth $\bar{\tau}$,

$$S_\nu(\tau_\nu) \simeq S_0 + S_1 \bar{\tau} \; . \tag{18}$$

If the opacity both in the continuum (α_c) and in the line ($\alpha_\mathrm{l}\phi_\nu$, where ϕ_ν is normalized line profile) can be taken approximately proportional to the mean opacity ($\bar{\alpha}$) through the optical depths where the line is formed, then

$$\tau_\nu \simeq \frac{\alpha_\mathrm{c} + \alpha_\mathrm{l}\phi_\nu}{\bar{\alpha}} \bar{\tau} \tag{19}$$

and

$I(\mu,\nu)$

$$\simeq \int_0^\infty \left[S_0 + S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c + \alpha_1 \phi_\nu} \tau_\nu \right] \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right) \frac{d\tau_\nu}{\mu} =$$

$$= S_0 + S_1 \frac{\bar{\alpha}\mu}{\alpha_c + \alpha_1 \phi_\nu} . \tag{20}$$

The limb-darkening is thus generally steeper in continuum than in a line. During an eclipse, the ratio z of visible and total (i.e. visible plus eclipsed) light is different at different μ (i.e. $z = z(\mu)$). Consequently, the contribution of the eclipsed component to the total specific intensity is

$$I_\nu = \int_0^1 I(\mu, \nu) z(\mu) d\mu \simeq z_0 S_0 + z_1 S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c + \alpha_1 \phi_\nu} , \tag{21}$$

where

$$z_k = \int_0^1 \mu^k z(\mu) d\mu \tag{22}$$

are moments of $z(\mu)$, which are algebraically independent. Unlike the case of a homogeneous stellar disk investigated in the previous section, where both the continuum and line intensities were proportional to a single factor z, the contribution of the eclipsed component to the total intensity in continuum (i.e. at $\phi_\nu = 0$)

$$I_1(z) \simeq z_0 S_0 + z_1 S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c} \tag{23}$$

is now affected by both z_0 and z_1, while its contribution to the line intensity

$$L_{1,\nu}(z) = I_1(z) - I_\nu \simeq z_1 S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c} \frac{\alpha_1 \phi_\nu}{\alpha_c + \alpha_1 \phi_\nu} \tag{24}$$

by z_1 only. The generalization of Eqs. (9), (10) for observed changes of line intensities thus reads

$$s_1 = 2z_1 \frac{S_0 + \frac{1}{2} S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c} + I_2}{z_0 S_0 + z_1 S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c} + I_2} \tag{25}$$

$$s_2 = \frac{S_0 + \frac{1}{2} S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c} + I_2}{z_0 S_0 + z_1 S_1 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_c} + I_2} . \tag{26}$$

The eclipse of an edge of the stellar disk, where $\mu \to 0$, can have negligible effect on z_1 and the line intensity, but observable effect on z_0 and the continuum intensity. This can lead to enhancement of relative line intensity even of the eclipsed component at this stage of eclipse. This effect is also marginally observable in the example of V436 Per shown in Fig. 2 (see Harmanec et al. 1997 for details on this system). Moreover, there seems to be a systematically higher effect in the stronger Hα line than in the He I line. The reason for this may lie beyond the Milne-Eddington approximation and the assumption (18).

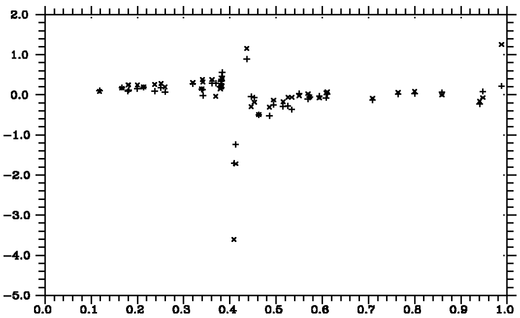


Fig. 2. Preliminary results of relative line photometry of V436 Per. Magnitude differences between the primary and secondary component (calculated according to Eq. (14) for Hα line ($\times$) and He I 6678 (+)) are plotted in dependence on the orbital phase (from periastron). The secondary minimum occurs close to phase 0.42 and the primary minimum at phase 0.98

Unlike the case simplified in the previous section by the assumption of homogeneous stellar disk, all free parameters (z_0, z_1 for each exposure and S_0, S_1) can not be directly calculated now. Instead of this, radii and orbital parameters which should match the geometry of eclipse to the orbital phase are to be fitted to the observed data together with appropriate models of stellar atmospheres. In such an application the relative line photometry can yield an additional test on model atmospheres.

Acknowledgements. The author is indebted to D. Holmgren, J. Kubát and R.E. Wilson for useful discussions and comments. The suggestions of an anonymous referee are also highly appreciated. This study was supported by the grant 205/96/0162 of the Grant Agency of the Czech Republic, project K1-003-601 and grant 303401 of the Grant Agency of Academy of Sciences.

References

Hadrava P., 1995, A&AS 114, 393
Harmanec P., et al., 1997, A&A (in press)
Simkin S.M., 1974, A&A 31, 129
Simon K.P., Sturm E., 1994, A&A 281, 286

The method of spectra disentangling and its links to Doppler tomography

Petr Hadrava[1,2]

[1] Astronomical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 251 65 Ondřejov, Czech Republic
[2] Physics Institute, NTNU, Trondheim, Norway

Abstract. The method of spectra disentangling fits time series of spectra of multiple stellar systems by a superposition of a priori unknown spectra of component stars with Doppler shifts due to orbital motion with orbital parameters not known in advance. The first part of this general problem – the decomposition of spectra using known radial velocities – was previously solved by the method of tomographic separation. The other part – the measurement of radial velocities for known component spectra – was best solved by the cross-correlation technique. The method of Fourier disentangling solves simultaneously both parts of this problem in a very effective way. It is shown here that its principle can also be used for Doppler tomography.

1 From radial-velocities measurement to disentangling and beyond

The observations of binary stars in general, and their spectroscopy in particular, yield most of information about the stellar properties.

1.1 Radial-velocity curves

In the standard approach one measures wavelengths of some effective centers of spectral lines and calculates instantaneous radial velocities (RVs) of the binary components from them. By fitting the RV-curves obtained in this way one gets the orbital parameters of the system, or, by simultaneous fitting of light-curves, one gets also some other physical parameters of the system. This procedure is based on several implicit, but sometimes not well satisfied assumptions, especially: (ι) the lines originating in individual components can be well distinguished and measured, and ($\iota\iota$) the measured centers of lines correspond to the RVs of the centers of mass of the components. The first assumption is violated whenever the spectral lines are highly blended. This is troublesome especially in the case of early-type stars, for which the line widths are often comparable with the RVs amplitudes.

The standard **method of cross-correlation** (Simkin 1974, Hill 1993) or its two-dimensional generalization (Zucker and Mazeh 1994) can improve the measurement of RVs in such cases. However, it requires at least an approximate knowledge of spectra of individual component stars because these are used as the template spectra to be cross-correlated with the individual exposures of spectra of the binary.

On the other hand, the information about the component spectra, which is of great interest by itself, can be obtained comparing the spectra of the binary observed in orbital phases with different RV-shifts. A simple method of separating of the component spectra from two exposures with known RVs has been developed by Ferluga et al. (1991, 1997). Problems with stability of the solution caused by the noise are overcome by an alternative method of the so-called **tomographic separation** (Bagnuolo and Gies 1991), which solves the overdetermined set of equations for the component spectra by fitting many exposures at once, thus diminishing their noise. This method is based on the analogy of the superposition of Doppler-shifted component spectra in different orbital phases with the tomographic projections in different angles of two parallel but displaced linear objects.

1.2 Spectra disentangling

Applying iterative steps of cross-correlation and spectra separation, it would thus be, in principle, possible to fit the observed spectra of binaries by simultaneous solution of component spectra and the RVs, skipping the questionable step of recognizing individual spectral lines and measurement of their wavelengths. Alternatively, the spectra separation can be merged with the solution of RV-curves into a single procedure yielding directly the component spectra and the orbital parameters and skipping the determination of individual RVs as well. The problem formulated in this generality has been named 'disentangling' by Simon and Sturm (1994) and this name will be used in this meaning hereafter.[1] From the mathematical point of view, the decomposition of the spectra of binary requires the solution (or the least-square fit) of the set of $k \times N$ linear equations

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{A1}\ \mathbf{M}_{B1} \\ \dots \\ \mathbf{M}_{Ak}\ \mathbf{M}_{Bk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}(t_1) \\ \dots \\ \mathbf{I}(t_k) \end{pmatrix} \tag{1}$$

for $2N$ unknowns. On the right-hand side of this equation there are k sub-vectors $\mathbf{I}(t_l)$ of the observed spectra (the number of exposures $k \geq 2$), each one of the

[1] Simon and Sturm understood by disentangling the step of the decomposition (i.e. the separation) of the component spectra only, which is alternated with the optimization of orbital parameters to minimize χ^2, i.e. the residual noise in the observed spectra. However, comparing to the standard procedure by means of RVs, the simultaneous solution of both these parts of the problem has an additional advantage because of the proper treatment of weights and errors of the information contained in the individual exposures. The method thus deserves its own name. Simon and Sturm argued that the problem of disentangling is different from that of tomography, the former being algebraic while the later being an analytical one. However, it will be shown here that the decomposition can be formulated analytically as well, while in the numerical solution, both methods must be represented algebraically.

dimension N corresponding to the number of pixels (typically of the order of 10^3). On the left-hand side, the submatrices $\mathbf{M}_{jl}$ are off-diagonal matrices with unit diagonals shifted according to the Doppler-shifts of the component stars A, B at times $t_l|_{l=1^k}$ of the exposures, the vectors $\mathbf{I}_A$ and $\mathbf{I}_B$ are the separated spectra of the components. To find the solution, Simon and Sturm used the method of singular value decomposition.

An alternative method of Fourier disentangling has been developed from the cross-correlation technique (Hadrava 1995). Equation (1) can be expressed in terms of convolution in logarithmic wavelength-variable $x = ln(\lambda/\lambda_0)$ of the intrinsic component spectra $I_j(x)$ with shifted δ-functions

$$\sum_{j=1}^{n} \delta(x - v_j(t_l)) * I_j(x) = I(x, t_l) \ , \tag{2}$$

where we have already admitted also a greater number n of the components with different RVs v_j. The Fourier transform (in variables $x \to y$) separates this equation into independent sets of equations

$$\sum_{j=1}^{n} \exp(iyv_j(t_l))\tilde{I}_j(y) = \tilde{I}(y, t_l) \tag{3}$$

for the individual Fourier modes. The original set of equations in $n \times N$-dimensional space (or $2N$-dimensional for a simple binary) thus splits into N systems of dimension n, what facilitates its numerical solution. To diminish the noise, it is again desirable to have the system overdetermined, i.e. the number of exposures $k > n$. The (linear) least-square fits of Eq. (3),

$$\frac{\partial S(y)}{\partial \tilde{I}_j(y)} = 0 \ , \tag{4}$$

where

$$S(y) = \sum_{l=1}^{k} \left| \ \tilde{I}(y, t_l) - \sum_{j=1}^{n} \exp(iyv_j(t_l))\tilde{I}_j(y) \ \right|^2 \ , \tag{5}$$

will correspond to the best fit of the observed spectra, provided the residual noise is white. The (non-linear) optimization of $S \equiv \int S(y)dy$ with respect to the orbital parameters p implicitly contained in RVs $v_j(t;p)$ (with substituted solutions of Eq. (4)) solves the general problem of spectra disentangling.

Already the first experience with this Fourier disentangling (implemented in the code named KOREL, cf. Hadrava 2000) showed that it yields more accurate RVs in a less laborious way than the cross-correlation technique.[2] In addition, the

[2] KOREL calculates RVs by cross-correlation of disentangled component spectra with the individual exposures, what explains its predominancy in comparison with the standard cross-correlation using arbitrarily chosen template spectra (not to speak about the comparison with manual RV-measurements). However, the direct solution of orbital parameters by KOREL is even better than the solution of RV-curves yielded by KOREL (which can be advantageous in combination with published RVs) due to the proper handling of the errors.

disentangled spectra enable to determine temperatures, rotational broadening or chemical compositions of the stars (see e.g. Harmanec et al. 1997, Zverko et al. 1997, Hensberge et al. 2000).

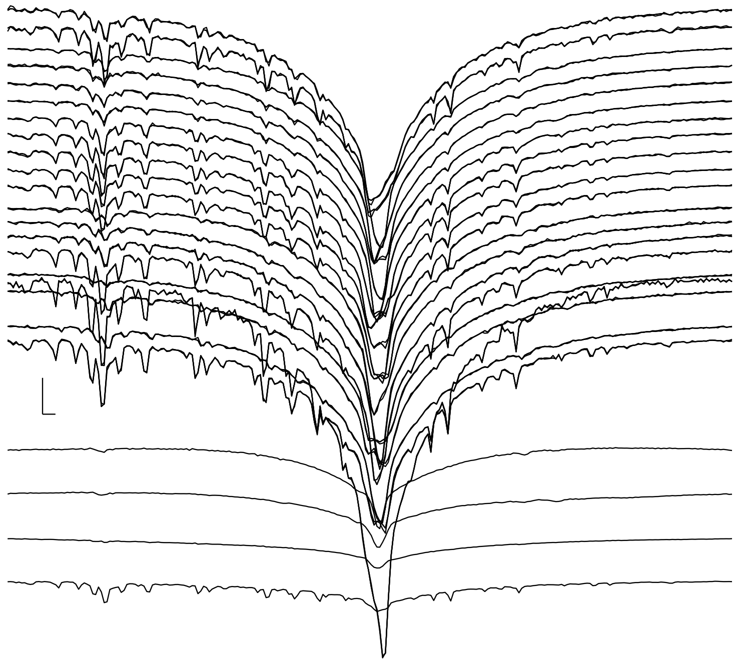


Fig. 1. Example of disentangled H_α line profiles of triple star 55 UMa. 20 source exposures with superimposed reconstructed spectra are at the top. Lower four spectra correspond to the separated components and the telluric lines.

Regarding to the above mentioned analogy between the separation of binary spectra and the tomography of object of size $2 \times N$ pixels, it is obvious that the method of Fourier decomposition used in the disentangling of n components could be simplified for tomography of object $n \times N$ by a proper choice of shifts v_j of individual rows proportional to their distances (see Section 2.1). Generally, however, the RVs of each component of a multiple stellar system can follow different laws. This enabled to disentangle spectra of some triple stars (see e.g. Drechsel et al. 1997 or Fig. 1). Another application could consist in separation of spectrum of hot spot in interacting binaries or spectra of individual spots in a spotted accretion disk (cf. Karas and Kraus 1996). In the later case the spots can be either due to the impact of gaseous stream in interacting binaries or due to some tidally driven hydrodynamic waves (i.e., the Doppler shifts need not to correspond to the velocities of propagation of the spots) or the spots can freely orbit around the central body like a planetary system. The disentangling could also be used for verification of suspected extrasolar planetary systems and distinguishing faint companions.[3]

It would be desirable to have a method enabling to separate spectra of arbitrarily sampled parts of a smooth accretion disc or stellar surfaces. Unfortunately, this problem would require an inversion of mapping from 3-dimensional space (2-dimensional surface + frequency) into a 2-dimensional one (phase + frequency) and it does not have a unique solution. For example, an observed Gaussian line-profile can be a convolution either of a narrow intrinsic line-profile with rotational broadening of a cloud with Gaussian density distribution, or of a wide Maxwellian profile with a negligible rotational broadening. The standard Doppler tomography restricts the problem assuming the spectrum of local emission to be a δ-function (see Marsh and Horne 1988), while the disentangling solves for arbitrary spectra of objects with geometry restricted to a finite or at maximum a 1-dimensional set of points. A mean way, based e.g. on the maximum entropy method (Skilling and Bryan, 1984) with a bias (cf. Horne 1985) corresponding to theoretical models in the additional dimension, could improve the solution. For example, the double-peaked emission of a Keplerian ring cannot be distinguished from a blended doublet of a point-like source by a pure mathematical spectra separation, but its confrontation with model spectra in a larger frequency region must solve the problem. Similarly, a deconvolution with a theoretical local line profile should enable to 'sharpen' spatial resolution of a tomographic mapping.

1.3 Relative line photometry and line-profile variations

Another way of improvement and generalization of the disentangling method consists in abandoning of the assumption on constancy of the line-profiles in the course of the whole orbital period. The first step has been developed (Hadrava 1997) to account for changes of line strengths keeping the shapes of lines constant. Using this generalization included in the code KOREL, it is possible, e.g., to separate efficiently telluric lines from the observed spectra. However, the initial motivation to vary the line strengths was to explain and to remove scatter of RVs observed during eclipses. According to a simple consideration of the eclipse of stellar disk, one would expect that the change of line shape during the eclipse due to the rotational (i.e. the Schlesinger – Rossiter) effect must be at least comparable to the change (i.e. a decrease) of the line strengths. Nevertheless, the experience shows that the differences between the limb darkening in lines and the continuum must be taken into account to explain the appearance of not only the dim out of spectral lines of the eclipsed star, but also their enhancement at the initial and final phases of the eclipse. This effect decreases the influence of rotation, so that the change of shape of the line-profile can be neglected for not too fast rotators. Moreover, this effect yields a tool for an eclipse probing of the vertical structure of the stellar atmospheres.

[3] E.g., the lines of the companion, about 4 magnitudes fainter than the primary, were decomposed from the spectra of AR Cas (Holmgren et al. 1999).

The next development of the disentangling method should include the changes of the shape of the intrinsic line-profiles caused either by the rotational effect and tidal distortion including the effects of gravity darkening, or by nonradial pulsations or by stellar spots. This can be achieved replacing the simple shifted δ-functions in Eq. (2) by the Fourier transform of (shifted) broadening profiles. The investigation of some of these problems is in progress in cooperation with R.E. Wilson (cf. Wilson 1994 for review).

2 Application of Fourier decomposition for computed tomography

2.1 Method of oblique projection

Let us suppose that the distribution of emissivity (per unit square in the velocity space) in a rotating source is given by a time-independent function $J(v_x, v_y)$. If there is no absorption of the emitted radiation[4] then the flux observed at the phase φ at radial velocity v_r is given by the Radon transform

$$F(v_r;\varphi) = \int J(v_x, v_y)\delta(v_r - v_x\cos\varphi - v_y\sin\varphi)dv_x dv_y = \tag{6a}$$

$$= \int J(\frac{v_r - v_y\sin\varphi}{\cos\varphi}, v_y)\frac{dv_y}{\cos\varphi} \ . \tag{6b}$$

The obliquely projected flux profile defined by

$$G(v_r;\varphi) \equiv \cos\varphi F(v_r\cos\varphi;\varphi) \tag{7}$$

then reads

$$G(v_r;\varphi) = \int J(v_r - v_y\tan\varphi, v_y)dv_y =$$

$$= \int J(v_r, v_y) \overset{v_r}{*} \delta(v_r - v_y\tan\varphi)dv_y \ . \tag{8}$$

Performing Fourier transform in variable $v_r \to r$, we get equation

$$\tilde{G}(r;\varphi) = \int \tilde{J}(r, v_y)\mathrm{e}^{iv_y r\tan\varphi}dv_y \ . \tag{9}$$

For a chosen discretization in the v_y-space the integration can be replaced here by summation and for a given set $\{\varphi_l|_{l=1}^{k}\}$ of observations, this set of equations can be solved with respect to $\tilde{J}$ in the same way as Eq. (3) is solved by Eq. (4). Alternatively, one can substitute here $\varphi = \mathrm{atan}\frac{z}{r}$ and to solve for $\tilde{J}(r, v_y)$ by inverse Fourier transform in z.

[4] I.e., either the source is optically thin, or J is given on the surface which does not change its inclination with respect to the line of sight.

Due to the loss of the observed information for $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ in Eq. (7), $\tilde{J}(r, v_y)$ is undefined for $r = 0$, and $J(v_x, v_y)$ is thus defined up to an additive function of v_y. This inconvenience can be overcome either by fixing $\lim_{v_x \to \pm\infty} J(v_x, v_y) = 0$, if the emission profile is localized within the computed region, or by combining the results calculated for (nearly) perpendicular directions of the initial phase $\varphi = 0$.

2.2 Fourier reconstruction technique

The angular asymmetry of the above described method using the obliquely projected flux is avoided in the Fourier reconstruction technique[5] based on the so-called projection-slice theorem which can be obtained by the Fourier transform of Eq. (6a),

$$\begin{aligned} \tilde{F}(r, \varphi) &= \int J(v_x, v_y) \mathrm{e}^{ir(v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi)} dv_x dv_y = \\ &= \tilde{\tilde{J}}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Consequently, the Fourier transform $\tilde{F}$ of perpendicularly projected flux F is equal to the cross-section in the corresponding direction of the two-dimensional Fourier transform $\tilde{\tilde{J}}$ of the emissivity distribution J. The emissivity J can thus be obtained by 2-dimensional inverse Fourier transform from $\tilde{\tilde{J}}$ interpolated from polar coordinates in which the radial sections $\tilde{F}$ are obtained from the observations.

Regarding to the experience from the medical computed tomography (Placidi et al. 1998), where the method of Fourier reconstruction has been found about 20-times faster than the widely used method of filtered back projection, the variants of Fourier methods seem to be worth of further investigation.

Acknowledgement. This study was supported by the grant A3003805 of the Grant Agency of the Academy of Sciences of the Czech Republic.

References

1. W.G. Bagnuolo Jr., D.R. Gies: ApJ **376**, 266 (1991)
2. H. Drechsel, M. Weeber, R. Lorenz, P. Hadrava: Astron. Ges. Abstr. Ser. **13**, 207 (1997)
3. S. Ferluga, S. Floreano, D. Mangiacapra: La Lettre de l'OHP **6**, 3 (1991)
4. S. Ferluga, S. Floreano, U. Bravar, C. Bédalo: A&AS **121**, 201 (1997)
5. P. Hadrava: A&AS **114**, 393 (1995)
6. P. Hadrava: A&AS **122**, 581 (1997)
7. P. Hadrava: 'KOREL – the user's guide', http://sunkl.asu.cas.cz/~had/korel.html (2000)

[5] However, the angular asymmetry of the oblique projection may turn into advantage if the observations do not cover sufficiently all phases.

8. P. Harmanec, P. Hadrava, S. Yang, D. Holmgren, P. North, P. Koubský, J. Kubát, E. Poretti: A&A **319**, 867 (1997)
9. H. Hensberge, K. Pavlovski, W. Verschueren: A&A **358**, 553 (2000)
10. G. Hill: 'The Measurement of Radial Velocities Using Cross-Correlation Technique as Applied to binary Stars'. In: *New Frontiers in Binary Stars Research*, ed. by K.-C. Leung, I.-S. Nhu (Calif. Astron. Soc. of the Pacific, San Francisco, 1993) p. 127
11. D. Holmgren, P. Hadrava, P. Harmanec, P. Eenens, L.J. Corral, S. Yang, H. Ak, H. Božić: A&A **345**, 855 (1999)
12. K. Horne: MNRaS **213**, 129 (1985)
13. V. Karas, P. Kraus: PASJ **48**, 771 (1996)
14. T.R. Marsh, K. Horne: MNRaS **235**, 269 (1988)
15. G. Placidi, M. Alecci, G. Colaciechi, A. Sotgiu: J. Magn. Reson. **134**, 280 (1998)
16. S.M. Simkin: A&A **31**, 129 (1973)
17. K.P. Simon, E. Sturm: A&A **281**, 286 (1994)
18. J. Skilling, R.K. Bryan: MNRaS **211**, 124 (1984)
19. R.E. Wilson: PASP **106**, 921 (1994)
20. S. Zucker, T. Mazeh: ApJ **420**, 806 (1994)
21. J. Zverko, J. Žižňovský, V.L. Khokhlova: Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso **27**, 41 (1997)

Algoritmy pro řízení 2m-dalekohledu

P. Hadrava

Abstrakt

Cílem tohoto dokumentu je shromáždit všechny základní algoritmy potřebné k naprogramování a odladění softwaru pro řízení 2-dalekohledu v Ondřejově. Je zde rovněž stručně popsán program KOR2M k výpočtu koeficientů pro softwarové korekce mechanických nepřesností dalekohledu.

1 Juliánské datum

Modifikované juliánské datum v gregoriánském kalendáři je dáno vztahem

$$GJD = 367y - \left[\frac{7(y + [\frac{m+9}{12}])}{4}\right] - \left[\frac{3(\left[\frac{y+[\frac{m-9}{7}]}{100}\right] + 1)}{4}\right] + [\frac{275m}{9}] + d + 1721028.5\ , \tag{1}$$

kde d je den (se zlomkovou částí počítanou od půlnoci), m a y jsou celočíselné pořadí měsíce (leden=1 atd.) a letopočet, [ ] označuje celou část.

2 Rovníkové souřadnice

Na polární ose se odečítá zdrojový hodinový úhel $SHA \equiv T \in (0°, 540°)$, na deklinační ose zdrojová deklinace $SDA \equiv D \in (0°, 360°)$. V základní poloze $T = 180°, D = 180°$ dalekohled míří k pólu a je otočen směrem k východnímu bodu. Astronomická deklinace

$$\delta = 90° - |D - 180°|\ , \tag{2}$$

takže

$$\sin\delta = -\cos D\ , \quad \cos\delta = \sin D \qquad \text{ve východní poloze } (D < 180°)\ , \tag{3}$$

$$\sin\delta = -\cos D\ , \quad \cos\delta = -\sin D \qquad \text{v západní poloze } (D > 180°)\ , \tag{4}$$

a astronomický hodinový úhel

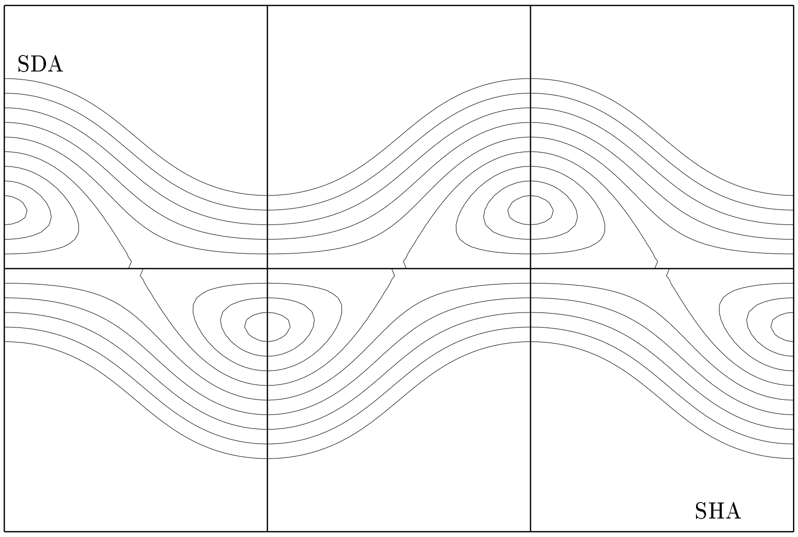
$$\tau = T - 180° \qquad \text{ve východní poloze } (D < 180°)\ , \tag{5}$$

$$\tau = T \qquad \text{v západní poloze } (D > 180°)\ , \tag{6}$$

takže sin i cos τ a T se liší znaménkem ve východní a zcela shodují v západní poloze.

3 Obzorníkové souřadnice

Zvolíme kartézské souřadnice x, y, z s počátkem ve středu kopule, osou x směřující k západnímu bodu, osou y k jižnímu bodu a osou z k zenitu a souřadnice x', y', z' otočené vůči nim v rovině poledníku tak,



Obrázek 1: Almukantaráty v souřadnicové síti SHA a SDA.

že osa z' směřuje k severnímu pólu a osa y' k průsečíku poledníku s rovníkem,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} , \tag{7}$$

kde φ je zeměpisná šířka. Pro hvězdu o souřadnicích τ, δ

$$\vec{r}' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\sin\tau \\ \cos\delta\cos\tau \\ \sin\delta \end{pmatrix} , \tag{8}$$

takže

$$\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\sin\tau \\ \cos\delta\cos\tau\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi \\ \cos\delta\cos\tau\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Výška hvězdy nad obzorem h a zenitová distance $ZA = 90° - h$ jsou potom dány vztahem

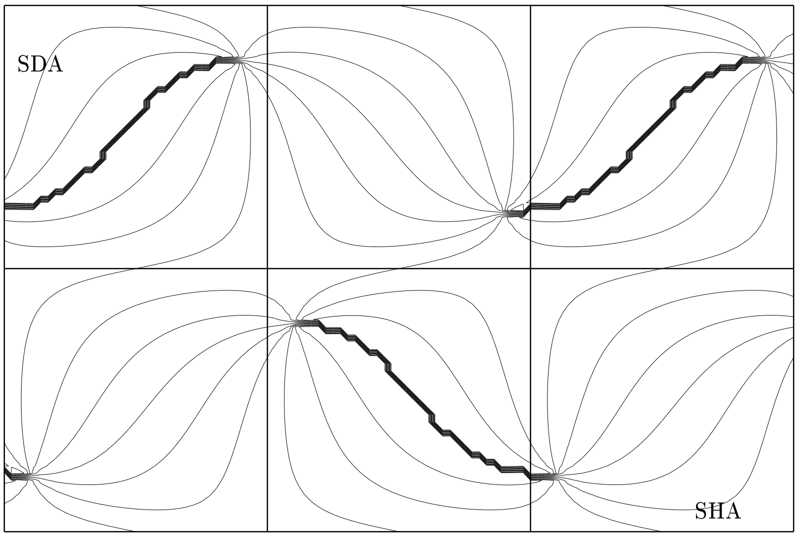
$$\begin{aligned} \sin h = \cos ZA &= z = \cos\delta\cos\tau\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi = \\ &= -\sin D\cos T\cos\varphi - \cos D\sin\varphi \, . \end{aligned} \tag{10}$$

Astronomický azimut hvězdy by byl dán vztahem $A = \mathrm{atan2}(y, x)$.

4 Azimut štěrbiny

Osa dalekohledu je od středu kopule posunuta o vektor

$$\vec{b}' \equiv \begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} = |b| \begin{pmatrix} \cos T \\ -\sin T \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{11}$$



Obrázek 2: Azimuty štěrbiny v souřadnicové síti SHA a SDA.

který je kolmý k $\vec{r}$. Osa dalekohledu tedy protíná kopuli (o poloměru R) v bodě o nečárkovaných souřadnicích

$$\begin{aligned} k\vec{r}+\vec{b} &= k\begin{pmatrix} \cos\delta\sin\tau \\ \cos\delta\cos\tau\sin\varphi-\sin\delta\cos\varphi \\ \cos\delta\cos\tau\cos\varphi+\sin\delta\sin\varphi \end{pmatrix} + |b|\begin{pmatrix} \cos T \\ -\sin\varphi\sin T \\ -\cos\varphi\sin T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -k\sin D\sin T+|b|\cos T \\ k(-\sin D\cos T\sin\varphi+\cos D\cos\varphi)-|b|\sin\varphi\sin T \\ k(-\sin D\cos T\cos\varphi-\cos D\sin\varphi)-|b|\cos\varphi\sin T \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{12}$$

kde pro k platí

$$R^2 = |k\vec{r}+\vec{b}|^2 = k^2+b^2 \ . \tag{13}$$

Azimut štěrbiny má tedy být

$$RAS = \mathrm{atan2}(y,x) \ . \tag{14}$$

5 Oprava o refrakci

V přiblížení rovinné atmosféry je pozorovaná zenitová vzdálenost ZA' hvězdy dána její skutečnou zenitovou vzdáleností ZA vně atmosféry a indexem lomu vzduchu $n\sim 1$ v místě pozorování

$$n\sin ZA' = \sin ZA \ . \tag{15}$$

Odtud refrakční úhel

$$R \equiv ZA-ZA' \simeq (1-n)\frac{d\,ZA'}{dn} = (n-1)\frac{\tan ZA'}{n} \simeq (n-1)\tan ZA \ . \tag{16}$$

Index lomu závisí na vlnové délce světla i na vlhkosti vzduchu, především je však přibližně úměrný hustotě vzduchu, takže je dán jeho teplotou $T[K] = 273.15 + AT[C]$ a tlakem P

$$n \sim 1 + k\frac{P}{T} \sim 1 + 60.2" \frac{P/1013.25hPa}{1 + AT/273.15C} . \tag{17}$$

Zenitová vzdálenost je dána pomocí deklinace a hodinového úhlu cosinovou větou (10) v nautickém trojúhelníku. Průmět refrakce R do směrů τ, resp. δ je dán sinem, resp. cosinem paralaktického úhlu q protilehlého zenitové vzdálenosti pólu v nautickém trojúhelníku, pro který podle cosinové, resp. sinové věty platí

$$\cos q = \frac{\sin\varphi - \sin\delta\cos ZA}{\cos\delta\sin ZA} , \quad \sin q = \cos\varphi\frac{\sin\tau}{\sin ZA} . \tag{18}$$

Proto tedy

$$\tau - \tau' = \frac{R\sin q}{\cos\delta} = \frac{(n-1)\sin q\sin ZA}{\cos\delta\cos ZA} = \frac{(n-1)\cos\varphi\sin\tau}{\cos\delta\cos ZA} , \tag{19}$$

$$\delta - \delta' = R\cos q = \frac{(n-1)\cos q\sin ZA}{\cos ZA} = (n-1)\frac{\sin\varphi - \sin\delta\cos ZA}{\cos\delta\cos ZA} , \tag{20}$$

takže[1]

$$T - T' = \frac{(n-1)\cos\varphi\sin T}{\sin D(\sin D\cos T\cos\varphi + \cos D\sin\varphi)} , \tag{21}$$

$$D - D' = (n-1)\frac{\sin\varphi\sin D - \cos D\cos\varphi\cos T}{\sin D\cos T\cos\varphi + \cos D\sin\varphi} . \tag{22}$$

Za $n-1$ se přitom dosazuje druhý člen výrazu (17).

6 Oprava o precesi a aberaci

Tyto opravy se v řídícím softwaru dalekohledu počítají podle přibližných vztahů v *Astronomické příručce* [2], str. 16–18 a 21–24. V programu KOR2M (viz str. 8) je pro výpočet přesných poloh měřených hvězd užito procedury AABER3 laskavě poskytnuté C. Ronem (viz Ron a Vondrák 1986).

Při přechodu z jedné inerciální soustavy do jiné s relativní rychlostí v se vlivem aberace mění úhel θ paprsku vůči apexu na hodnotu θ' splňující

$$\cos\theta' = \frac{c\cos\theta - v}{c - v\cos\theta} , \tag{23}$$

takže v lineárním přiblížení

$$\Delta\theta = \theta' - \theta \simeq \frac{v}{c}\sin\theta . \tag{24}$$

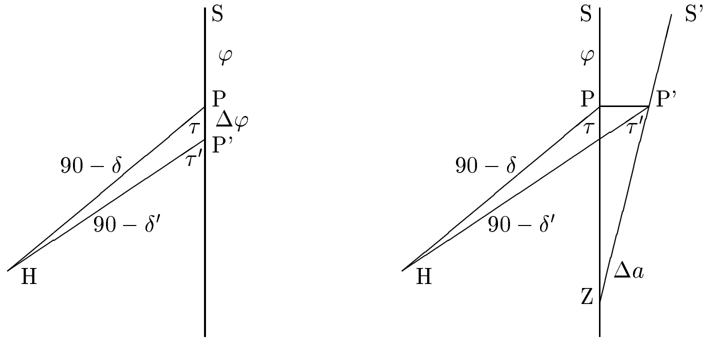
Jestliže apex má rovníkové souřadnice α_A, δ_A, pak

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sin\delta_A\sin\delta + \cos\delta_A\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_A) && (25)\\ \sin\theta\sin\phi &= \cos\delta\sin(\alpha - \alpha_A) , && (26) \end{aligned}$$

kde ϕ je neměnný polární úhel v souřadné soustavě s pólem orientovaným k apexu. Odtud diferencováním

$$\begin{aligned} -\sin\theta\Delta\theta &= (\sin\delta_A\cos\delta - \cos\delta_A\sin\delta\cos(\alpha - \alpha_A))\Delta\delta && (27)\\ &\quad - \cos\delta_A\cos\delta\sin(\alpha - \alpha_A)\Delta\alpha \\ \cos\theta\sin\phi\Delta\theta = \cot\theta\cos\delta\sin(\alpha - \alpha_A)\Delta\theta &= -\sin\delta\sin(\alpha - \alpha_A)\Delta\delta + \cos\delta\cos(\alpha - \alpha_A)\Delta\alpha . && (28) \end{aligned}$$

[1] Po dosazení (10) lze totiž čitatel (20) upravit do složitějšího, ale obvyklejšího tvaru $\sin\varphi - \sin\delta\cos ZA = \cos\delta(\sin\varphi\cos\delta - \sin\delta\cos\varphi\cos\tau)$.



Obrázek 3: Vliv chyb v nastavení polární osy

7 Oprava na mechanické nepřesnosti

Justážní a konstrukční nepřesnosti (např. v nastavení polární osy nebo v nekolmosti os) způsobují chyby v rektascenzi a deklinaci, jejichž velikost je třeba stanovit empiricky z pozorování hvězd, a takto stanovené konstanty je pak možno zadat do korekčních procedur řídícího systému. K měření lze použít buď programové hvězdy, jejichž zdrojové souřadnice se zaznamenají několikrát v průběhu expozice, nebo (zejména k doplnění dat z méně obvyklých poloh dalekohledu) měřením libovolných jasných hvězd. Poloha a čas se zaznamená kliknutím na ikonku "korekce" při hvězdě napointované na clonku image-sliceru (CTC přitom může být dle libosti ON nebo OFF). Ke zpracování dat, která se ukládají do souboru `file.dat` v knihovně `/tcsuser/corr`, slouží fortranský program KOR2M, který měřenou hvězdu zidentifikuje s nejbližší hvězdou ze svého katalogu, obsahujícího všechny hvězdy do 4. magnitudy podle BSC (je v plánu úprava na HIPPARCOS). Proto není vhodné měřit složky blízkých dvojhvězd a při použití slabších programových hvězd je třeba zkontrolovat jejich zařazení do katalogu. Rovněž je vhodné poznamenat chybná měření (např. pomocí jejich času), aby mohla být vypuštěna z datového souboru ještě před jeho zpracováním.

Chyba $\Delta\varphi$ ve sklonu polární osy. Jestliže polární osa P' dalekohledu svírá se severním bodem S úhel o $\Delta\varphi$ větší než je skutečná zeměpisná šířka φ, v níž je skutečný pól P, pak podle kosinové věty ve sférickém trojúhelníku $PP'H$ (kde H je měřená hvězda – viz obr. 3 vlevo)

$$\sin\delta' = \sin\delta\cos\Delta\varphi + \cos\delta\sin\Delta\varphi\cos\tau \simeq \sin\delta + \cos\delta\cos\tau\Delta\varphi \;, \tag{29}$$

tj.[2]

$$(\delta' - \delta) \simeq \frac{\sin\delta' - \sin\delta}{\cos\delta} \simeq \cos\tau\Delta\varphi \;. \tag{30}$$

Podle sinové věty

$$\sin\tau' = \sin\tau\frac{\cos\delta}{\cos\delta'} \simeq \sin\tau\frac{\cos\delta}{\cos\delta - (\delta'-\delta)\sin\delta} \simeq \sin\tau[1 + (\delta'-\delta)\tan\delta] \;, \tag{31}$$

takže

$$(\tau' - \tau) \simeq \frac{\sin\tau' - \sin\tau}{\cos\tau} \simeq \sin\tau\tan\delta\Delta\varphi \;. \tag{32}$$

[2] V původních vzorcích od Zeissů je tento člen s opačným znaménkem.

Chyba Δa v azimutu polární osy. Podobně při posunu polární osy v azimutu platí podle kosinové věty v trojúhelníku $PP'H$ (viz obr. 3 vpravo)

$$\sin\delta' = \sin\delta\cos PP' - \cos\delta\sin PP'\sin\tau \simeq \sin\delta - \cos\delta\sin\tau\cos\varphi\Delta a\ , \tag{33}$$

tj.

$$(\delta' - \delta) \simeq \frac{\sin\delta' - \sin\delta}{\cos\delta} \simeq -\sin\tau\cos\varphi\Delta a\ . \tag{34}$$

Podle kosinové věty v trojúhelnících HPZ a $HP'Z$ (kde Z je zenit)

$$\cos HZ = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos\tau = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\cos\varphi\cos\tau'\ . \tag{35}$$

Odtud

$$\cos\delta\cos\varphi\sin\tau(\tau' - \tau) = (\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos\tau)(\delta' - \delta)\ , \tag{36}$$

tj.

$$(\tau' - \tau) = (\tan\delta\cos\varphi\cos\tau - \sin\varphi)\Delta a\ . \tag{37}$$

Chyba Δw v kolmosti deklinační a polární osy. Při sešikmení deklinační osy o úhel Δw od směru přesně kolmého vůči polární ose dalekohled míří pro různá δ místo do deklinační kružnice do jiné hlavní kružnice protínající ji na rovníku, takže

$$\delta' - \delta = 0 \tag{38}$$

a

$$\tau' - \tau = \cot D\Delta w\ , \tag{39}$$

kde D je zdrojová deklinace.

Chyba Δo v kolmosti optické a deklinační osy. Jestliže optická osa dalekohledu je odkloněna od směru přesně kolmého k deklinační ose, pak při natočení deklinační osy okolo polární osy, které by mělo odpovídat deklinační kružnici se zdrojovým hodinovým úhlem T, dalekohled míří na vedlejší kružnici posunutou o úhel Δo tak, že

$$\delta' - \delta = 0 \tag{40}$$

a

$$\tau' - \tau = \frac{\Delta o}{\sin D} \tag{41}$$

(chyba v hodinovém úhlu tedy diverguje $\sim \cos^{-1}\delta$ na pólu a mění znaménko v proložené poloze).

Chyby g_δ a g_τ nulových bodů. V důsledku nepřesností justáže čidel kalibračních bodů mohou být zdrojové souřadnice posunuty o konstanty

$$D' - D = g_\delta \tag{42}$$

a

$$T' - T = g_\tau\ . \tag{43}$$

Průhyb Δd deklinační osy. Na rameno $\vec{b}$ deklinační osy působí váha dalekohledu silou $\vec{F}$ v záporném směru osy z, tj. v čárkovaných kartézských souřadnicích

$$\vec{F}' = -F \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} . \tag{44}$$

Moment této síly způsobí ohyb deklinační osy o úhel (cf. (11))

$$\frac{\Delta\vec{b}}{b} = \frac{\Delta d}{F}\left(\vec{F}' - \vec{b}'\frac{(\vec{F}'\vec{b}')}{b^2}\right) = -\Delta d \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos T\sin T \\ \cos\varphi\cos^2 T \\ \sin\varphi \end{pmatrix} . \tag{45}$$

Složka ve směru z' je nezávislá na poloze dalekohledu a ekvivalentní nekolmosti Δw deklinační a polární osy. Lze ji buď ze vztahu pro Δb vypustit a formálně zahrnout do Δw,[3] nebo přidat jí úměrný člen tvaru (39) do výrazu pro $\Delta\tau$ vlivem Δd. Složky $\Delta\vec{b}$ ve směrech os x' a y' odpovídají přídavnému stočení deklinační osy o úhel $\Delta\tau \sim \cos\varphi\cos\tau$ (tj. maximální odchylka v poledníku, kdy deklinační osa míří východním nebo západním směrem, a nulové pro $\tau = \pm 6^{\mathrm{h}}$, kdy je deklinační osa nad nebo pod polární osou). Toto stočení deklinační osy způsobí stočení dalekohledu o stejné $\Delta\tau$ nezávislé na δ, takže výsledný příspěvek ohybu deklinační osy je

$$\delta' - \delta = 0 \tag{46}$$

a

$$\tau' - \tau = \Delta d\,(\cos\varphi\cos T + \sin\varphi\cot D) \ . \tag{47}$$

Průhyb Δr tubusu dalekohledu. Analogicky vztahu (45) je deformace $\Delta\vec{r}$ osy (8) tubusu dalekohledu vlivem jeho vlastní váhy (44) dána vztahem

$$\Delta\vec{r} = \frac{\Delta r}{F}\left(\vec{F}' - \vec{r}'(\vec{F}'\vec{r}')\right) = \Delta r(-\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\delta\sin\tau \\ \cos\delta\cos\tau \\ \sin\delta \end{pmatrix}(\cos\delta\cos\tau\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi)) \ . \tag{48}$$

Průměty tohoto posunutí do δ a τ jsou[4]

$$\delta' - \delta = (\Delta\vec{r}\vec{e}_\delta) = -\Delta r(\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\delta\sin\tau \\ -\sin\delta\cos\tau \\ \cos\delta \end{pmatrix}) = \Delta r(\sin\delta\cos\tau\cos\varphi - \cos\delta\sin\varphi) \tag{49}$$

a

$$\tau' - \tau = \frac{1}{\cos\delta}(\Delta\vec{r}\vec{e}_\tau) = -\Delta r(\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau \\ -\sin\tau \\ 0 \end{pmatrix}) = \Delta r\cos\varphi\sin\tau \ . \tag{50}$$

Výsledná chyba v důsledku všech výše uvedených mechanických vlivů je součtem pravých stran rovnic (30), (34), (42) a (49) pro deklinaci a (32), (37), (39), (41), (43), (47) a (50) pro hodinový úhel. Pro chyby

[3] Toto zjednodušení by bylo rozumné i proto, že tuhost deklinační osy podél a napříč ložiska hodinové osy může být stejně různá.

[4] Protože jednotkové vektory $\vec{e}_{\delta,\tau} \sim \frac{\partial}{\partial\delta,\tau}\vec{r}'$ jsou kolmé na $\vec{r}'$, můžeme druhý člen v (48) vynechat.

zdrojové deklinace D (která má v západní poloze opačné znaménko než δ) a zdrojového hodinového úhlu T tedy

$$\begin{aligned}\Delta D &= -\Delta\varphi\cos T + \Delta a\sin T\cos\varphi + g_\delta + \Delta r(\cos D\cos T\cos\varphi - \sin D\sin\varphi)\ , && (51)\\ \Delta T &= \Delta\varphi\cot D\sin T + \Delta a\ (\cot D\cos T\cos\varphi - \sin\varphi) + \Delta w\cot D + \frac{\Delta o}{\sin D} + g_\tau && (52)\\ &+\Delta d\,(\cos T\cos\varphi + \cot D\sin\varphi) - \Delta r\sin T\cos\varphi\ .\end{aligned}$$

Hodnoty koeficientů $\Delta\varphi$, Δa, Δw, Δo, g_δ, g_τ, Δd a Δr pro výpočet těchto oprav musí být nalezeny z pozorování metodou nejmenších čtverců (tj. minimalizací $(O-C)^2 \sim \sum(\Delta D)^2 + \sin^2 D(\Delta T)^2$). Tento výpočet provádí autorův program KOR2M.FOR, který načítá ze souboru KOR2M.IN hodnoty souřadnic zaznamenaných do souboru 2m-dalekohledem na pokyn z řídícího panelu a porovná je (po příslušných opravách) s katalogovými souřadnicemi nejbližší hvězdy ze souboru KOR2M.DAT. Zpřesňování koeficientů tedy nevyžaduje pozorovací čas dalekohledu, ale lze je provádět na programových hvězdách, pokud jsou jejich souřadnice zařazeny do souboru. Pro přesnost proložení korekčních členů je ovšem třeba dbát na dobré pokrytí celého rozsahu souřadnic dalekohledu a využívat pro měření přednostně chybějících poloh.

8 Předvolba souřadnic

Při zadání přejezdu na předvolené souřadnice by se mělo:
1) Vypočítat a zobrazit výška nového objektu nad obzorem. Pokud je menší než 10°, napsat vážné varování a požadovat potvrzení příkazu (které by mohlo mít význam pouze k najetí na horizontální omezení pro montážní účely).
2) Vypočítat a zobrazit čas $t = \tau_{10} - \tau$ zbývající k pozorování před naražením na horizontální omezení v hodinovém úhlu τ_{10}, který je podle rov. (10) dán vztahem

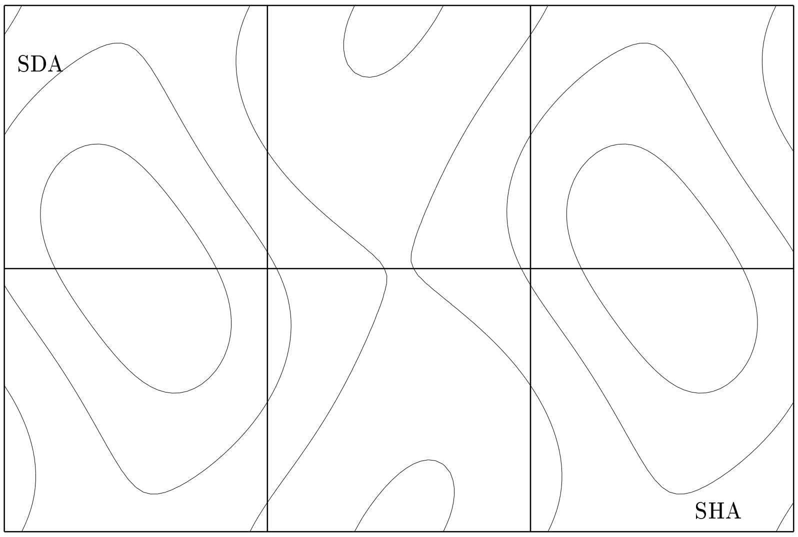
$$\cos\tau_{10} = \frac{\sin 10^\circ - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}\ . \qquad (53)$$

3) Pokud je zdrojový hodinový úhel T nové polohy $T \geq 360^\circ$, vypočítat a zobrazit čas $t = (540^\circ - T)/15^\circ$ zbývající do úplného zamotání kabelů a dát pozorovateli volbu, zda nechce přetočit dalekohled do $T \in (0^\circ, 360^\circ)$.
4) Vypočítat azimut štěrbiny pro novou polohu a pokud je ADC 'on', spustit otáčení kopule do této polohy, nikoliv do průběžně se měnícího RSA podle okamžité polohy dalekohledu.
5) Vypočítat rozdíly $|T_p - T_k|$ a $|D_p - D_k|$ počátečních a koncových zdrojových poloh a nastavit rychlosti hrubých pohybů na maximum v tomto poměru. Pokud je $\tau_p < 180^\circ$ a $\tau_k > 180^\circ$ nebo naopak (tj. jde o přejezd nad severním obzorem), vypočítat výšku $h_s = \varphi + \delta_s - 90^\circ$ pohybu rovnoměrnou rychlostí nad severním bodem, tj. v bodě $\tau_s = 180^\circ$ a $\delta_s = \delta_p + \frac{\delta_p - \delta_k}{\tau_p - \tau_k}(180^\circ - \tau_p)$. Pokud je $h_s \geq 10^\circ$, spustit přejezd. V opačném případě změnit rychlosti jako by $\tau_k = 180^\circ$ a $\delta_k = \delta_{min} > 10^\circ$ a jet pouze hrubým pohybem do tohoto bodu. Po jeho přejetí vypočítat nový přejezd z okamžité do koncové polohy.[5]

9 Propojení Cassegrainova ohniska optickými vlákny

Pro připojení spektrografu v podlaží kopule optickými vlákny ke Cassegrainovu ohnisku je třeba zvolit optimální umístění spektrografu a kontrolovat rozmezí poloh dalekohledu tak, aby vzdálenost ohniska od

[5] Tento algoritmus nezaručuje stoprocentní vyhnutí se horizontálnímu omezení při efektivně malém δ_{min}, empiricky odzkoušená hodnota např. $\delta_{min} \simeq 15^\circ$ by však mohla v praxi vyhovovat.



Obrázek 4: Délka optického vlákna v souřadnicové síti SHA a SDA.

spektrografu nepřesáhla délku l optických vláken. Jestliže a je výška průsečíku hodinové a deklinační osy nad podlažím, resp. nad vyústěním vláken ve spektrografu, b je délka deklinační osy a c je vzdálenost příruby optických vláken (o které předpokládáme, že je v optické ose dalekohledu) od deklinační osy, pak kartézské souřadnice příruby jsou (ve východní poloze dalekohledu)

$$\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\cos\tau \\ \sin\tau\sin\varphi \\ \sin\tau\cos\varphi \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} \cos\delta\sin\tau \\ \cos\delta\cos\tau\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi \\ \cos\delta\cos\tau\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi \end{pmatrix} . \tag{54}$$

Při pevné poloze spektrografu $\vec{r_0} = (x_0, y_0, 0)^T$ je tedy omezení poloh dalekohledu dáno nerovností

$$||\vec{r} - \vec{r_0}|| < l \ , \tag{55}$$

v případě možnosti přesouvání spektrografu pod přírubu dalekohledu postačuje podmínka

$$z < l \ . \tag{56}$$

Reference

[1] C. Ron, J. Vondrák 1986: “Expansion of annual aberration into trigonometric series”, BAC 37, 96 – 103

[2] J. Vondrák 1992: “Korekce souřadnic”, v: *Astronomická příručka*, M. Wolf (ed.), Academia, Praha 1992, str. 16 – 27