3.5 Relativistická kinetická teorie

Zvolený pozorovatel může kinetickou teorii v podobě, ve které jsme ji formulovali v kapitole 3.1, aplikovat z pohledu své vztažné soustavy i na plyn složený z relativistických částic (viz např. odstavec 3.1.3). Jestliže se však budeme zabývat vztahy mezi veličinami naměřenými různými inerciálními pozorovateli, pak předpoklady galileovské grupy transformací (tj. absolutní čas, invariantnost prostorového i hybnostního objemu a pouhé posunutí v prostoru hybností, které jsme používali např. při vyjádření (3.11) tenzoru napětí vůči vztažné soustavě pomocí jeho složek ve vlastní soustavě plynu) budou omezovat použitelnost klasické teorie na případ nerelativistického plynu a nerelativistických rychlostí vztažných soustav. Chceme-li vybudovat lorentzovsky invariantní kinetickou teorii, musíme revidovat zavedení základních pojmů, jako je i fázový prostor.

3.5.1 Fázový prostor

Nechť V je prostoročas s pseudo-riemannovskou metrikou g (se signaturou −,+,+,+). Metrika g definuje na V lorentzovsky invariantní čtyř-objem

$$\eta \equiv d^4V = \sqrt{-|g|}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dt \wedge d^3V, \tag{3.191}$$

kde (x^0, x^1, x^2, x^3) jsou souřadnice v libovolné mapě a $|g|$ je determinant matice kovariantních složek g (takže v libovolné ortonormální bázi dx^ι je $|g| = -1$). Tří-objem

$$\eta_U \equiv d^3V = \langle d^4V.U\rangle \tag{3.192}$$

měřený pozorovatelem se čtyř-rychlostí U a vlastním časem t se transformuje při přechodu k čárkovanému pozorovateli

$$d^3V' = \frac{dt}{dt'} d^3V = \frac{\eta_U}{U'^0}\ . \tag{3.193}$$

Tří-objem tedy lorentzovsky kontrahuje v opačném poměru (daném $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$) než ve kterém časový interval dilatuje, zatímco prostoročasový čtyř-objem zůstává lorentzovsky invariantní.

Na tečném prostoru T_x hybností (p^0, p^1, p^2, p^3) částic v daném bodě x definuje g čtyř-objem hybností

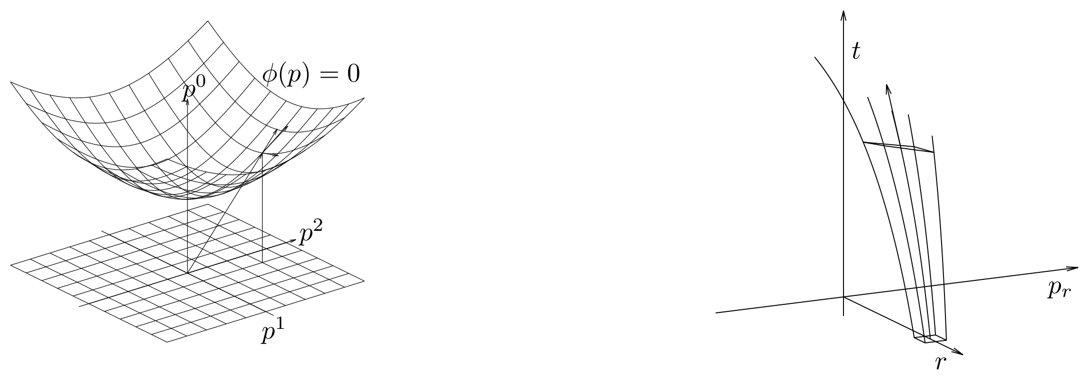
$$\pi \equiv d^4P = \sqrt{-|g|}\, dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3. \tag{3.194}$$

Ten je opět lorentzovsky invariantní, i když jeho projekce do U a kolmé nadroviny (tj. do časové a prostorových složek z hlediska zvoleného pozorovatele) nejsou invariantní. Pokud se zabýváme pouze částicemi s danou klidovou hmotností m, jejichž čtyř-hybnosti splňují relaci

$$0 = \phi(p) = p^2 + m^2, \tag{3.195}$$

popřípadě jinou, např. disperzní relaci, pak se prostor hybností redukuje na tzv. hmotovou slupku T_ϕ, tj. třídimenzionální podvarietu variety T_x, ve které můžeme jako souřadnice použít např. prostorové (z hlediska zvoleného pozorovatele) složky p a časovou složku vyjádřit jako jejich funkci $p^0 = p^0(p^i)$ (zpravidla se omezujeme na $p^0 > 0$, viz obr. 3.5). Lorentzovsky invariantní tří-objem π_ϕ na T_ϕ (indukovaný metrikou g) dostaneme zúžením d^4P s jednotkovým vektorem kolmým k T_ϕ, takže

$$d^4P = \frac{d\phi}{|d\phi|} \wedge \pi_\phi. \tag{3.196}$$



Obrázek 3.5: a) Souřadnice na hmotové slupce. b) Fázové trajektorie částic padajících radiálně na černou díru.

V konkrétním tvaru rovnice (3.195) vychází

$$\pi_\phi = \sqrt{-|g|}\frac{m}{p_0} dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3. \tag{3.197}$$

Relativistickým zobecněním fázového prostoru je tečný bundle $M = \{(x,p)|x \in V, p \in T_x\}$ (viz definice 7 na str. 63) s metrikou

$$G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \tag{3.198}$$

a osmi-objemem

$$\begin{aligned} \Omega &= d^4V \wedge d^4P = \\ &= -|g|\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3 = \\ &= -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dp_0 \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3. \end{aligned} \tag{3.199}$$

Pro částice splňující relaci (3.195) je fázovým prostorem hmotová slupka M_ϕ jako sedmidimenzionální podvarieta M s invariantní mírou

$$\Omega_\phi = d^4V \wedge \pi_\phi \tag{3.200}$$

3.5.2 Liouvilleův teorém a Boltzmannova rovnice

Ve fázovém prostoru M definují pohybové rovnice jedné částice

$$\frac{d\xi}{dw} = \Xi(\xi), \tag{3.201}$$

kde $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3, p^0, p^1, p^2, p^3)$, jednoparametrickou grupu pohybových transformací, tj. fázových trajektorií parametrizovaných afinním parametrem w. Fázový objem Ω je vůči tomuto pohybu invariantní, pokud Liouvilleův operátor $L = \frac{d}{dw}$ splňuje tzv. Liouvilleův teorém

$$\mathrm{div} L = 0 \tag{3.202}$$

Pak totiž (podle (A.87), (A.86) a (A.60))

$$\frac{d}{dw}\int_D \Omega = \int_D \pounds_L \Omega = \int_D d\langle L.\Omega\rangle = \int_D (\mathrm{div} L)\Omega = 0, \tag{3.203}$$

kde $D = D(w) \subset M$ je libovolná oblast (přičemž míra Ω je dána metrikou a divergence odpovídající metrickou konexí). V tomto případě je míra

$$\omega = \langle L.\Omega \rangle \tag{3.204}$$

invariantní mírou udávající hustotu fázových trajektorií protínajících libovolnou sedmidimenzionální nadplochu (např. vlastní fázový prostor $\Gamma = \{(x,p) \in M | (U\frac{\partial}{\partial x}) = 0\}$ pozorovatele nebo soustavy pozorovatelů se čtyřrychlostí U), neboť

$$0 = \int_D d\langle L\Omega \rangle = \int_{\partial D} \langle L\Omega \rangle = \int_{\partial D} \omega = \int_\Gamma \omega - \int_{\Gamma'} \omega . \tag{3.205}$$

Potom můžeme také definovat invariantní rozdělovací funkci f na M jako hustotu fázových trajektorií obsazených částicemi tak, že počet částic $N(\Gamma)$ naměřených pozorovatelem v jeho fázovém objemu $\int_\Gamma \eta_U \wedge d^4P$ je

$$N(\Gamma) = \int_\Gamma f\omega . \tag{3.206}$$

Pohybová rovnice pro vývoj f v důsledku pohybu (3.201) a popřípadě i srážek je tzv. Boltzmannova rovnice

$$L(f) = \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_{\mathrm{c}} , \tag{3.207}$$

kde srážkový člen na pravé straně udává lorentzovsky invariantní fázovou hustotu částic vznikajících minus zanikajících v daném elementu fázového objemu,

$$\int_D \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_{\mathrm{c}} \Omega = N(\Gamma) - N(\Gamma') = \int_{\partial D} f\omega = \int_D d(f\langle L.\Omega \rangle) = \int_D L(f)\Omega . \tag{3.208}$$

Srážkový člen $\left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_{\mathrm{c}}$ může být opět vyjádřen jako multilineární funkcionál f integrací přes hybnosti počátečních a koncových stavů ostatních částic účastnících se srážky.

Pohyb (3.201) splňuje Liouvilleův teorém (3.202) pokud jde o pohyb Hamiltonovský, tj.

$$\begin{aligned} L_{x^\iota} \equiv \frac{dx^\iota}{dw} &= \frac{\partial H(x^\kappa, p_\lambda)}{\partial p_\iota} \\ L_{p_\iota} \equiv \frac{dp_\iota}{dw} &= -\frac{\partial H(x^\kappa, p_\lambda)}{\partial x^\iota} , \end{aligned} \tag{3.209}$$

neboť pak je

$$\mathrm{div} L = \Xi^I_{,I} = \frac{\partial}{\partial x^\iota} L_{x^\iota} + \frac{\partial}{\partial p_\iota} L_{p_\iota} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^\iota \partial p_\iota} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\iota \partial x^\iota} = 0 . \tag{3.210}$$

3.5.3 Makroskopické veličiny a jejich dynamické vztahy

Podobně jako v nerelativistické kinetické teorii, určuje i nyní rozdělovací funkce f hodnoty lokálních i globálních makroskopických veličin charakterizujících vlastnosti celého souboru částic popsaného funkcí f. Analogicky zavedení hustoty částic, hustoty hybnosti a tenzoru napětí v odstavci 3.1.1 nebo 3.1.3, mohou být prostoročasové hustoty q různých tenzorových veličin Q typu T^p_q dány jako součet příspěvků od všech obsazených hybnostních stavů v příslušné události, tj. integrálem příslušné veličiny Q středované s vahou f přes d^4P, resp. přes hmotovou slupku π_ϕ

$$q = \int Q f d^4 P . \tag{3.211}$$

Některé veličiny jako např. entropie zavedená v odstavci 3.3.1 mohou být dány i nelineární závislostí na rozdělovací funkci f. Z Boltzmannovy rovnice (3.207) pak pro tyto veličiny vyplývají zákony zachování, resp. jiné dynamické vztahy.

Vynásobme rovnici (3.207) například skalární funkcí $Q(f,x,p)$ na fázovém prostoru, která může být závislá i na rozdělovací funkci f a implicitně i na některých parametrech popisovaných částic (např. na jejich nábojích různého typu), a integrujme ji přes oblast fázového prostoru $D = D_V \times D_P$, která je direktním součinem (libovolné malé) oblasti D_V prostoročasu a oblasti D_P na prostoru 4-hybností (poloměr této oblasti na tečném fibru půjde naopak limitně do nekonečna). Analogicky rovnici (3.208) platí

$$\int_D Q(f,x,p)\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)_{\mathrm{c}}\Omega = \int_D Q(f,x,p)L(f)\Omega = \int_D L(fQ)\Omega - \int_D fL(Q)\Omega\,. \tag{3.212}$$

Protože povrch oblasti D se skládá ze dvou částí,

$$\partial D = (\partial D_V \times D_P) \cup (D_V \times \partial D_P)\,, \tag{3.213}$$

můžeme první z integrálů upravit

$$\begin{aligned}\int_D L(fQ(f,x,p))\Omega &= \int_D d(fQ\langle L.\Omega\rangle) = \int_{\partial D} fQ\langle L.\Omega\rangle = \\ &= \int_{\partial D_V}\int_{D_P} fQ\langle L.d^4V\rangle d^4P + \int_{D_V}\int_{\partial D_P} fQ\langle L.d^4P\rangle d^4V\,.\end{aligned} \tag{3.214}$$

Druhý člen na pravé straně vymizí, jestliže rozdělovací funkce f klesá k velkým hodnotám složek hybnosti mnohem rychleji než roste Q (i v případě závislosti Q na f) a velikost ∂D_P. Zavedeme-li prostoročasový vektor J hustoty 4-proudu veličiny Q tak, aby[29]

$$\langle J.d^4V\rangle = \int_{D_P} fQ\langle L.d^4V\rangle d^4P\,, \tag{3.215}$$

pak dostáváme

$$\int_D L(fQ)d^4V \wedge d^4P = \int_{\partial D_V}\langle J.d^4V\rangle = \int_{D_V} d\langle J.d^4V\rangle = \int_{D_V}(\mathrm{div}J)d^4V\,. \tag{3.216}$$

Protože rov. (3.212) má platit pro libovolnou oblast D_V, musí v každé události platit rovnice kontinuity toku J i v diferenciálním tvaru

$$(\mathrm{div}J) - \int_{D_P} fL(Q)d^4P = \int_{D_P} Q(f,x,p)\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)_{\mathrm{c}} d^4P\,. \tag{3.217}$$

3.5.4 Lokálně dynamicky symetrické rozdělení

V kapitole 3.3 jsme odvodili, že ve vlastním klidovém systému plynu je v termodynamické rovnováze rozdělovací funkce částic funkcí pouze energie částic $E = E(p)$ měřené v tomto systému (a souřadnic x). Jestliže nyní víme, že f je lorentzovsky invariantní, pak to znamená, že v obecné soustavě, vůči níž má lokální vlastní klidová soustava plynu 4-rychlost $U^\iota = U^\iota(x)$, musí být rozdělovací funkce závislá na 4-hybnosti pouze prostřednictvím součinu $p_\iota U^\iota$. V termodynamické rovnováze musí mít

[29] Prostoročasová část $L_{x^\iota}\frac{\partial}{\partial x^\iota}$ vektoru L na tečném bundlu je přitom obecně funkcí hybnosti p.

f navíc některý z konkrétních tvarů (3.143) nebo (3.144) podle kvantové povahy popisovaných částic. Jestliže však budeme mít jakékoliv rozdělení tvaru

$$f = f\left(x, (pU(x))\right) \ , \tag{3.218}$$

které nazveme lokálně dynamicky symetrické (tedy např. bude energetické rozložení odlišné od rovnovážného, bude však stále izotropní), pak z Boltzmannovy rovnice pro dynamiku tohoto plynu vyplývají silná omezení.

Především ze samotné podmínky $UU = -1$ (tj. (2.4), kde nyní pro zjednodušení výrazů užijeme geometrické jednotky $c = 1$) vyplývá

$$U_\iota U^{\iota;\kappa} = 0 \ , \tag{3.219}$$

odkud pro 4-zrychlení

$$a^\iota = U^\iota{}_{;\kappa} U^\kappa \tag{3.220}$$

lokálních pozorovatelů v klidu vůči plynu dostáváme podmínku (2.5) kolmosti na 4-rychlost. Zavedeme-li projektor do vlastního prostoru těchto pozorovatelů[30]

$$P^{\iota\kappa} = U^\iota U^\kappa + g^{\iota\kappa} \ , \tag{3.221}$$

můžeme s jeho pomocí každý 4-vektor X rozložit na časovou a prostorovou složku

$$X^\iota = -U^\iota (U_\kappa X^\kappa) + P^\iota{}_\kappa X^\kappa \tag{3.222}$$

rovnoběžnou a kolmou k U. Podobně každý tenzor X můžeme rozložit na časovou, smíšenou (prostorově-časovou) a prostorovou složku

$$X^{\iota\kappa} = U^\iota U^\kappa (U_\lambda X^{\lambda\mu} U_\mu) - (P^\iota{}_\lambda U^\kappa U_\mu X^{\lambda\mu} + U^\iota U_\lambda P^\kappa{}_\mu X^{\lambda\mu}) + P^\iota{}_\lambda P^\kappa{}_\mu X^{\lambda\mu} \ . \tag{3.223}$$

Pro kovariantní derivaci samotného U se tento výraz vzhledem k (3.219) zjednoduší na

$$U^{\iota;\kappa} = -P^\iota{}_\lambda U^\kappa U^{\lambda;\mu} U_\mu + P^\iota{}_\lambda P^\kappa{}_\mu U^{\lambda;\mu} = -a^\iota U^\kappa + U^{\iota;\lambda} P^\kappa{}_\lambda \tag{3.224}$$

$$= -a^\iota U^\kappa + \omega^{\iota\kappa} + \sigma^{\iota\kappa} + \frac{1}{3}\theta P^{\iota\kappa} \ , \tag{3.225}$$

kde antisymetrický tenzor rotace (vorticity)

$$\omega^{\iota\kappa} = U^{[\iota;\lambda} P^{\kappa]}_{\ \lambda} = U^{[\iota;\kappa]} + a^{[\iota} U^{\kappa]} \ , \tag{3.226}$$

a symetrický tenzor smyku (shear)

$$\sigma^{\iota\kappa} = U^{(\iota;\lambda} P^{\kappa)}_{\ \lambda} - \frac{1}{3} U^\lambda{}_{;\lambda} P^{\iota\kappa} = U^{(\iota;\kappa)} + a^{(\iota} U^{\kappa)} - \frac{1}{3}\theta P^{\iota\kappa} \ , \tag{3.227}$$

jsou prostorové tenzory ve vlastním klidovém systému plynu a

$$\theta = U^\iota{}_{;\iota} \tag{3.228}$$

je skalár expanze.

[30] Dosazením se lze přesvědčit že P je skutečně projektor

$$P^\iota{}_\kappa P^\kappa{}_\lambda = P^\iota{}_\lambda$$

a že jeho stopa $P^\iota{}_\iota = 3$.

Obecný mocninný moment rozdělovací funkce je symetrický tenzor. V případě lokálně dynamicky symetrického rozdělení, jehož jediným význačným směrem je 4-rychlost U, musí být každý moment zkonstruován ze symetrizovaných tenzorových součinů U a g. Např. tenzor energie-hybnosti musí mít tvar lineární kombinace

$$T^{\iota\kappa} \sim \langle p^\iota p^\kappa f \rangle = A(x) U^\iota U^\kappa + B(x) g^{\iota\kappa} \tag{3.229}$$

a tenzor třetího řádu

$$Q^{\iota\kappa\lambda} \sim \langle p^\iota p^\kappa p^\lambda f \rangle = W(x) U^\iota U^\kappa U^\lambda + 3V(x) U^{(\iota} g^{\kappa\lambda)} \; . \tag{3.230}$$

Z momentů Boltzmannovy rovnice pro plyn v metrickém poli vyplývá, že kovariantní 4-divergence se musí rovnat momentu srážkového členu. Jestliže rozdělovací funkce je dynamicky symetrická a srážky mezi částicemi tuto symetrii nenarušují (např. interakcí s jiným druhem částic rozdělených nesymetricky), pak i srážkový člen musí být lokálně dynamicky symetrický a jeho momenty musí být také zkonstruovány z U a g. Konkrétně pro druhý moment Boltzmannovy rovnice tak dostáváme vztah

$$Q^{\iota\kappa\lambda}{}_{;\iota} = \langle p^\kappa p^\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta \tau} \right)_{\mathrm{c}} \rangle \sim X(x) U^\kappa U^\lambda + Y(x) g^{\kappa\lambda} \; , \tag{3.231}$$

ze kterého po dosazení (3.230) vyplývá diferenciální rovnice pro U

$$(\dot{W} + W\theta) U^\kappa U^\lambda + 2W a^{(\kappa} U^{\lambda)} + (\dot{V} + V\theta) g^{\kappa\lambda} + 2V^{(,\kappa} U^{\lambda)} + 2V U^{(\kappa;\lambda)} = X(x) U^\kappa U^\lambda + Y(x) g^{\kappa\lambda} \; . \tag{3.232}$$

Rozložením této rovnice do časové, smíšené a prostorové složky, a dále rozložením prostorové složky na její část s nulovou stopou a na stopu, dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} \dot{W} + W\theta - 3\dot{V} - V\theta &= X - Y && (3.233) \\ (V - W) a^\kappa &= P^\kappa{}_\iota V^{,\iota} && (3.234) \\ \sigma &= 0 && (3.235) \\ \dot{V} + \frac{5}{3} V\theta &= Y \; . && (3.236) \end{aligned}$$

Z rovnice (3.234) tedy vyplývá, že nutnou podmínkou k tomu, aby plyn mohl být lokálně dynamicky symetrický (a speciálně tedy i v termodynamické rovnováze), je, že jeho zrychlení musí být úměrné prostorové projekci gradientu jistého skaláru. Podobně podle (3.235) je nutnou podmínkou také nulovost smyku. Lze dokázat, že další nutnou podmínkou je, že plyn nemůže být současně rotující a expandující, tj. $\theta\omega = 0$.