Rocheův model

Petr Hadrava

19. března 2004

1 Úvod

Tato práce se zabývá Rocheovým problémem, čímž rozumíme úkol matematického popisu slapového působení mezi dvěma tělesy, které je podstatné jak pro dynamiku a stavbu těles ve Sluneční soustavě, tak pro fyziku dvojhvězd.

Pozorování dvojhvězd má pro stelární astrofyziku zásadní význam, protože umožňuje určit základní fyzikální parametry hvězd, především jejich hmotnosti, kterými gravitačně vážou své průvodce. Zároveň však přítomnost hvězdného průvodce může ovlivňovat vlastnosti studované složky dvojhvězdy – v první řadě právě svým slapovým působením. To deformuje tvar a rozložení jasu povrchu hvězdy a tím i světelné křivky dvojhvězdy. Navíc slapová interakce omezuje objem, který má každá složka těsné dvojhvězdy k dispozici. Důsledkem toho jsou poměrně složité různorodé scénáře vývoje dvojhvězd s výměnou hmoty, tedy jevu způsobujícího pekuliarity ve vývoji různých dvojhvězdných soustav. Rocheův model slapové síly dává uspokojivé přiblížení k vysvětlení těchto jevů ve dvojhvězdách s kruhovými dráhami. Tento model je užíván i k vysvětlení chování excentrických dvojhvězd, kde ovšem nejsou splněny jeho základní předpoklady. Proto zde shrneme standardní Rocheův model dvojvězd a budeme se dále zabývat i jeho zobecněním pro výstředné dráhy.

2 Historické poznámky

Otázka slapového působení sehrála důležitou roli v historii chápání gravitace. V aristotelovském pojetí vesmíru (Aristoteles 384-322 př.n.l.) jsou všechna tělesa přitahována ke středu vesmíru, který splývá se středem zeměkoule. Empiricky vypozorovaný vztah přílivu a odlivu s polohou Měsíce na obloze, dobře známý např. Pliniovi staršímu (23-79 n.l.) nebo Ptolemaiovi (∼100 - 178), byl chápán jako projev zvláštního působení Měsíce na vodu. M. Koperník (1473 - 1543) ve svém heliocentrickém modelu sluneční soustavy již píše o tom, že každé těleso má svůj střed, ke kterému tíhne hmota stejné podstaty, a proto mají nebeská tělesa kulový tvar. J. Kepler (1571-1630) již pokročil k představě gravitační síly, která je jistou obdobou magnetismu a je příčinou slapového působení Měsíce na pozemské oceány. Předpokládal, že gravitační síla je nepřímo úměrná vzdálenosti a přímo úměrná hmotnosti tělesa. Odtud vypočítal rozměry oblastí gravitačního působení Země a Měsíce, o nichž předpokládal, že jsou stejné podstaty a stejné hustoty (srov. Hadravová a Hadrava 2004).

Teprve I. Newton (1643-1727) byl schopen v rámci své mechaniky a teorie gravitace podat rámcově správný kvantitativní popis slapového působení Měsíce a Slunce na Zemi.

Věděl, že gravitační síla, kterou Země, Měsíc, nebo jiné sféricky symetrické těleso o hmotnosti M působí na nějakou částici (hmotnosti m), klesá se čtvercem vzdálenosti,

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2} \ . \tag{1}$$

Kromě toho ovšem na částici působí neinerciální (odstředivá) síla

$$F_o = m\Omega^2 r \ , \tag{2}$$

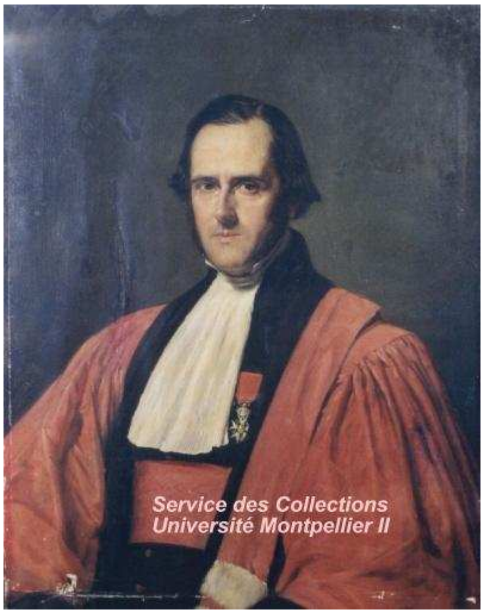
způsobená orbitálním pohybem, která se s F_g ruší ve středu průvodce M', tj. ve vzdálenosti $R = (GM\Omega^{-2})^{1/3}$. Na částici ve vzdálenosti $R + x$ tedy působí výsledná slapová síla (od tělesa M)

$$F = m\Omega^2(R+x) - \frac{GMm}{(R+x)^2} \simeq m\Omega^2 x + 2\frac{GMmx}{R^3} = 3\frac{GMmx}{R^3} \ . \tag{3}$$

Ta by se s vlastní gravitací průvodce M' vyrušila ve vzdálenosti x od jeho středu splňující vztah

$$\frac{M'}{x^3} = 3\frac{M}{R^3} \ . \tag{4}$$

Rozměr oblasti převládajícího gravitačního působení každého tělesa ve dvojné soustavě tedy neklesá nepřímo úměrně jeho hmotnosti, ale pouze třetí odmocnině jeho hmotnosti.



Obrázek 1: Portret E.A. Roche

Newtonovi následovatelé podali zpřesnění jeho teorie slapů a rovnovážné konfigurace Země (C. Maclaurin (1698-1746), A. C. Clairaut (1713-1765), P. S. Laplace (1749-1827)).

K nim patřil i Edouard Albert Roche (17.10.1820 - 18.4.1883), který se zabýval následující úvahou. Pokud by průvodce byl sféricky symetrický s poloměrem r', pak jeho vlastní gravitace všude na jeho povrchu převáží nad slapovými silami působenými hmotou M pouze když $r' < x$, tj. když poloměr jeho dráhy

$$R = x\left(3\frac{M}{M'}\right)^{1/3} > r'\left(3\frac{M}{M'}\right)^{1/3} = \left(\frac{9M}{4\pi\rho'}\right)^{1/3} , \tag{5}$$

kde ρ' je střední hustota průvodce. Pokud bude průvodce tekutý, pak rotační zploštění a slapová síla ovlivní jeho tvar a tím i vlastní gravitaci, nicméně musí existovat jistá tzv. Rocheova mez lišící se od výrazu (5) nejvýše o faktor řádu 1 (odvozený v práci Roche 1850), pod níž by průvodce byl slapovými silami centrálního tělesa roztrhán na útvar analogický Saturnovým prstencům, resp. by nikdy nemohl vzniknout vzájemným gravitačním zachycováním hmoty obíhající v proto-planetárním (proto-měsíčním) disku.

3 Předpoklady Rocheova modelu dvojhvězd

Standardní Rocheův model dvojhvězdy (s kruhovou dráhou) předpovídá, že povrchy obou složek koincidují s některou ekvipotenciálou efektivního potenciálu Φ, který je součtem gravitačního potenciálu (bodových) středů obou složek a odstředivého potenciálu,

$$\Phi(x) = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{\Omega^2}{2} r_\perp^2 . \tag{6}$$

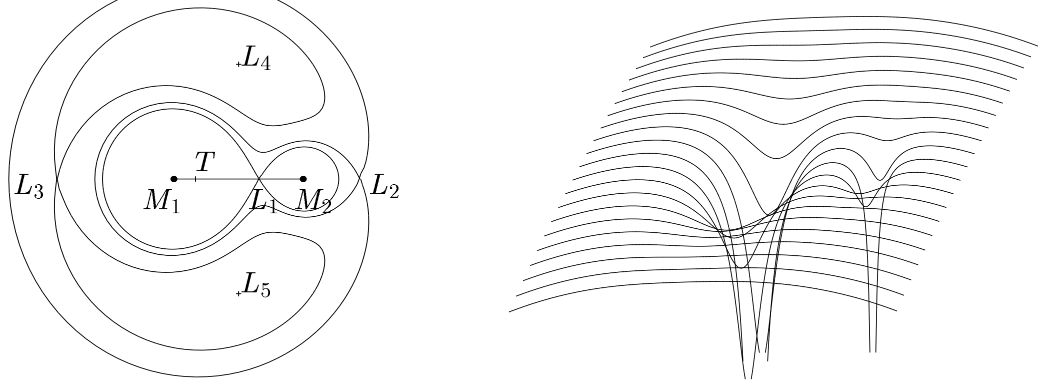
Zde $M_{1,2}$ jsou hmoty obou složek, $r_{1,2}$ jsou vzdálenosti bodu x od středů těchto hvězd, Ω je oběžná úhlová rychlost (o níž předpokládáme, že je také úhlovou rychlostí vázané rotace složek) a $r_\perp$ je vzdálenost x od osy orbitálního pohybu. Tento potenciál, jehož průběh je znázorněn na obr. 1 a v tab. 1, je totožný s potenciálem v restringovaném problému tří těles. Maximální rozměr každé složky v oddělené dvojhvězdě je omezen jejím Rocheovým lalokem, tj. ekvipotenciálou procházející vnitřním Lagrangeovým bodem L_1. Efektivní poloměr sekundární hvězdy (tj. poloměr sféry o objemu shodném s Rocheovým lalokem) integrovaný numericky (Kopal 1959) lze aproximovat se střední relativní chybou přibližně 1,5% vztahem

$$\log\frac{R_2}{R} = \frac{\log q}{6} + c_1 - \sqrt{(\frac{\log q}{6} + c_2)^2 + c_3} , \tag{7}$$

kde $c_1 = -0,1827$, $c_2 = -0,1100$ a $c_3 = 0,04513$ (Hadrava 1979, str. 50), nebo s chybou asi 2% vztahem (Eggleton 1983)

$$\frac{R_2}{R} = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1+q^{1/3})} . \tag{8}$$

Tvrzení, že efektivní potenciál (6) určuje i tvar složek dvojhvězdy, je založeno na předpokladech, že
(i) hvězdy jsou v hydrostatické rovnováze, a



Obrázek 2: Ekvipotenciály efektivního potenciálu ve dvojhvězdě s poměrem hmot $q \equiv \frac{M_2}{M_1} = 0,2$.

q	x_{L1}	x_{L2}	x_{L3}	Φ_{L1}	Φ_{L2}	Φ_{L3}	Φ_{L4}
1,0	0,500	1,698	-0,698	-4,000	-3,457	-3,457	-2,750
0,5	0,571	1,582	-0,803	-2,959	-2,661	-2,491	-2,083
0,2	0,659	1,438	-0,902	-2,249	-2,122	-1,899	-1,717
0,1	0,718	1,347	-0,947	-1,964	-1,898	-1,700	-1,605
0,02	0,825	1,199	-0,989	-1,657	-1,644	-1,540	-1,520

Tabulka 1: Polohy Lagrangeových bodů (v jednotkách vzdálenosti R středů hvězd) a hodnoty efektivního potenciálu v nich (v jednotkách GM_1/R).

(ii) že kvadrupólový a vyšší momenty rozdělení hmoty v nitrech obou složek neovlivňují podstatně newtonovský potenciál obou hvězd.

Oba tyto předpoklady vyžadují pečlivé přezkoumání, které ukazuje, že vlastně nejsou nikdy splněny přesně, a že Rocheův model může být přijat jako dobré přiblížení pouze v některých speciálních případech, zatímco pro většinu skutečných dvojhvězd musí být buď modifikován a zobecněn, nebo je nutné jej zcela opustit.

3.1 Nekonzistentnost hydrostatické a zářivé rovnováhy

O hvězdných nitrech obecně a tedy i o nitrech složek dvojhvězd se předpokládá, že jsou v hydrostatické rovnováze, která je popsána rovnicí hydrostatické rovnováhy

$$\nabla P + \rho \nabla \Phi(x) = 0 \ , \tag{9}$$

kde P a ρ jsou tlak a hustota hmoty v nitru hvězdy vzájemně svázané stavovou rovnicí. Z této rovnice vyplývá, že P musí být konstantní na každé ekvipotenciální ploše $\Phi = konst.$, tj. $P = P(\Phi)$ a tedy také $\rho = -\frac{dP}{d\Phi}$ musí být funkcí pouze Φ. Protože obě tyto veličiny jsou stavovou rovnicí $P = P(\rho, T)$ svázány s teplotou T (a podobně i další veličiny charakterizující stav plynu, jako třeba stupeň ionizace, opacita atd.), musí v hydrostatické rovnováze být každá ekvipotenciála plochou, na níž je hvězda homogenní. Teplota uvnitř hvězdy (v nitrech i v atmosféře, s výjimkou konvektivních vrstev) je ovšem zpravidla dána zářivou rovnováhou. Podle difúzní aproximace zářivé rovnováhy, která je dobře splněna ve velkých optických hloubkách ve hvězdném nitru i v subfotosférických vrstvách, je zářivý tok úměrný gradientu $\frac{dS}{d\tau}$ vydatnosti S (která je v lokální termodynamické rovnováze dána Planckovou funkcí) vůči optické hloubce τ. Protože opacita musí být také konstantní po ekvipotenciále, tento gradient je úměrný prostorovému gradientu Φ, tj. gravitačnímu zrychlení g. Tento závěr je základem tzv. von Zeipelova teorému, protože podle Stefanova-Boltzmannova zákona je lokální efektivní teplota T_e na povrchu dána tokem F a tedy lokálním g, tj. $T_e \sim g^{1/4}$ (von Zeipel 1924a, b, c). V difúzní aproximaci ovšem musí mít vektor F rovněž shodný směr s vektorem g, tj. musí být vždy kolmý k ekvipotenciálám. Proto v důsledku divergence vertikálních křivek musí docházet k různému řídnutí zářivého toku v závislosti na místním zakřivení ekvipotenciálních ploch. Tím se narušuje homogenita teploty po ekvipotenciále, což vede ke vzniku tečných (meridionálních) toků jak záření, tak plynu, a tedy k porušení výchozího předpokladu hydrostatické rovnováhy. Porušení homogenity teploty po ekvipotenciálních plochách je ještě výraznější ve fotosféře, kde je vertikální teplotní struktura určena lokální efektivní teplotou T_e (srov. Hadrava 1987b, 1988).

3.2 Multipólový rozvoj gravitačního pole

Vraťme se nyní ke druhému z předpokladů Rocheova modelu. Slapová deformace působením průvodce nebo rotační zploštění každé hvězdy musí způsobit nesféričnost rozdělení její hmoty, tj. nenulovost vyšších momentů rozdělení hmoty. Ty v multipólovém rozvoji způsobí nesféričnost vlastního gravitačního pole hvězdy, která zpětně ovlivňuje i vnitřní strukturu příslušné hvězdy. Hledání self-konzistentního řešení rovnic struktury hvězdy, ve zjednodušení prostě rovnice hydrostatické rovnováhy (9) a Poissonovy rovnice pro skalární potenciál Φ gravitačního pole hvězdy,

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \; , \tag{10}$$

je matematicky poněkud komplikované (viz Chandrasekhar 1969). Nicméně pro snadno stlačitelná plynná nitra hvězd může být vliv nesféričnosti jejich gravitačního pole zpravidla zanedbán, neboť většina jejich hmoty je soustředěna v malém okolí jejich centra, kde jsou malé i rušivé síly (slapová či odstředivá). K dosažení vyšší přesnosti bývá více než postačující vzít v úvahu lineární opravu pro nejnižší členy multipólového rozvoje.

Podle vztahů (60) až (63) a (68) můžeme vnější gravitační potenciál hvězdy (tj. pro $r > r'$) napsat ve tvaru

$$\Phi(r) = -\int \frac{G\rho(r')}{|r - r'|} d^3r' = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{G}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} Y_{lm}(n) \; , \tag{11}$$

kde

$$C_{lm} = \int \frac{4\pi}{2l+1}(r')^l Y_{lm}^*(n')\rho(r')d^3r' \;, \qquad (12)$$

Slapová porucha potenciálu klesá se třetí mocninou vzdálenosti průvodce (viz rov. (3)). Proto může být nejvýznamnější u dotykových nebo polodotykových dvojhvězd, u nichž jsou vnější poloměry složek podstatnou částí vzdálenosti jejich středů. Horní vrstvy hvězdných niter mají ovšem nepatrné hmotnosti a jádra hvězd, kde je soustředěna většina jejich hmoty, jsou již oddělena a tedy je nepatrně slapově deformována. Koncentrace hmoty ke středu je ještě výraznější pro hvězdy, které v průběhu vývoje již vyčerpaly vodík ve svém nitru a opustily hlavní posloupnost. Vnější vrstvy těchto hvězd se rozpínají, takže často vyplňují prostor omezený gravitačním působením jejich průvodce a jsou jeho slapovým působením výrazně deformovány. Přesto vyšší multipólové momenty rozdělení hmoty v těchto nejčastějším polodotykových systémech jsou zanedbatelné. V následujícím se proto jimi nebudeme zabývat; v případě potřeby je možné nahradit sféricky symetrické gravitační potenciály $\frac{GM_{1,2}}{r_{1,2}}$ složek obecnějšími potenciály $\Phi_{1,2}(r_{1,2})$.

3.3 Rocheovy souřadnice

Nejlepší současné modely atmosfér dvojhvězd jsou skládány jako mozaiky z malých částí planparalelních modelů hvězdných atmosfér odpovídajících lokálním hodnotám T_e a g (srov. Kallrath a Milone 1999). Ke získání lepšího modelu by bylo žádoucí řešit třírozměrný přenos záření ve slapově deformovaných složkách. Alespoň přibližná homogenita složek dvojhvězdy po ekvipotenciálních plochách napovídá, že by bylo výhodné hledat řešení rovnice přenosu záření v tzv. Rocheových souřadnicích, zavedených Kopalem (1970) jako křivočaré souřadnice, z nichž jedna splývá s Rocheovým potenciálem Φ a druhé dvě, jejichž souřadnicové čáry jsou k Rocheovým ekvipotenciálám kolmé, se asymptoticky směrem ke středu hvězdy (kde je potenciál téměř sféricky symetrický) blíží k úhlovým složkám sférických souřadnic. Rovnice přenosu záření a z ní vyplývající rovnice kontinuity zářivého toku mají poměrně jednoduchý tvar

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{n^i}{h_i}\frac{\partial I}{\partial q^i} + \frac{h_{k,i}n^k - h_{i,k}n^i}{h_i h_k} n^k \frac{\partial I}{\partial n^i} = \alpha(S-I) \qquad (13)$$

$$\frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{h_1 \partial q^1}(h_2 h_3 H) = \alpha(S-J) \qquad (14)$$

v libovolném tří-ortogonálním souřadnicovém systému $\{q^i\}$, tj. sytému s metrikou

$$ds^2 = \sum_i (h_i dq^i)^2 \qquad (15)$$

(viz Hadrava 1981). Původně se předpokládalo, že 3-ortogonalita bude vlastnost i takto definovaných Rocheových souřadnic. Existence tří-ortogonálního souřadnicového systému doplňujícího danou funkci Φ však vyžaduje, aby tato funkce splňovala podmínky integrability, které mají tvar diferenciální tzv. Cayleyovy-Darbouxovy rovnice (viz Cayley 1872, Darboux 1898).

Označme hledané souřadnice $\{q^i(x)|_{i=1}^3\} = \{\Phi, \eta, \zeta\}$. Souřadnicové čáry $\eta = konst.$ a $\zeta = konst.$ mají být kolmé k potenciálu $\Phi(x)$ zadanému jako funkce kartézských souřadnic

x, jehož hodnotami mohou být parametrizovány ($x^i = x^i(\Phi)$). Funkce $\eta(x)$ a $\zeta(x)$ v celém prostoru jsou určeny volbou na jedné ekvipotenciále $\Phi(x) = \Phi_0 = konst.$ a integrací tečných vektorů k souřadnicovým čarám

$$\left[\frac{dx^i}{d\Phi}\right]_{\eta,\zeta=konst.} = \frac{\nabla^i\Phi}{(\nabla\Phi)^2} \ . \tag{16}$$

Na ploše $\Phi = \Phi_0$ můžeme funkce η a ζ zvolit (alespoň lokálně) tak, aby jim odpovídající souřadnicové čáry byly vzájemně kolmé

$$0 = g_{23} = \frac{\partial x^i}{\partial\eta}\frac{\partial x^i}{\partial\zeta} \tag{17}$$

(zde $x(q)$ je transformace inverzní ke $q(x)$). Toho lze dosáhnout např. libovolnou volbou η a dodefinováním ζ podle podmínky (17). 3-ortogonalita souřadnic q v celém prostoru (resp. alespoň v nějaké jeho otevřené oblasti) bude splněna, jestliže podmínka (17) bude zachována při pohybu (16), tj. bude-li platit

$$0 = \frac{d}{d\Phi}g_{23} = \frac{\partial x^i}{\partial\eta}\left[\nabla^j\frac{\nabla^i\Phi}{(\nabla\Phi)^2} + \nabla^i\frac{\nabla^j\Phi}{(\nabla\Phi)^2}\right]\frac{\partial x^j}{\partial\zeta} \ , \tag{18}$$

což spolu s podmínkami ortogonality

$$0 = \Phi_{,i}\frac{\partial x^i}{\partial\eta} \ , \qquad 0 = \Phi_{,i}\frac{\partial x^i}{\partial\zeta} \tag{19}$$

znamená

$$0 = \frac{\partial x^i}{\partial\eta}\Phi_{,ij}\frac{\partial x^j}{\partial\zeta} \ , \tag{20}$$

a tedy že směry souřadnicových čar η a ζ musí být zvoleny ve směrech vlastních vektorů projekce symetrického operátoru $\Phi_{,ij}$ do tečné roviny k ekvipotenciále. Splnění této podmínky musí být opět invariantní vůči pohybu (16), tj. musí platit i

$$0 = \frac{d}{d\Phi}\left[\frac{\partial x^i}{\partial\eta}\Phi_{,ij}\frac{\partial x^j}{\partial\zeta}\right] \ , \tag{21}$$

tj.

$$0 = \frac{\partial x^i}{\partial\eta}A_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial\zeta} \ , \tag{22}$$

kde

$$A_{ij} = (\Phi_{,ijk}\Phi_{,k} + 2\Phi_{,ik}\Phi_{,kj})\Phi_{,l}\Phi_{,l} - 4\Phi_{,ik}\Phi_{,jl}\Phi_{,k}\Phi_{,l} \ . \tag{23}$$

Aby operátory $\Phi_{,ij}$ a A_{ij} mohly mít v rovině tečné k ekvipotenciále společné vlastní vektory, musí po vynásobení projektory

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\Phi_{,i}\Phi_{,j}}{(\nabla\Phi)^2} \tag{24}$$

spolu komutovat

$$0 = P(AP\Phi - \Phi PA)P \ , \tag{25}$$

tj. potenciál Φ musí splňovat Cayleyovu - Darbouxovu rovnici

$$0 = \epsilon^{ijk}\Phi_{,i}[\Phi_{,jlm}\Phi_{,m}(\Phi_{,lk}\Phi_{,n}\Phi_{,n} - \Phi_{,kn}\Phi_{,l}\Phi_{,n}) - 2\Phi_{,jm}\Phi_{,m}\Phi_{,kl}\Phi_{,ln}\Phi_{,n}] \ . \tag{26}$$

Rocheův potenciál ve dvojhvězdách (6) ovšem tuto rovnici obecně nesplňuje. Výjimkou je speciální případ nulové hmotnosti průvodce, tedy případ osamocené rotující hvězdy, ve kterém se díky rotační symetrii Cayleyova-Darbouxova úloha redukuje do dvou dimenzí (např. roviny r z) a má proto vždy řešení. Skutečnosti, že obecný Rocheův potenciál tuto existenční podmínku pro tří-ortogonální souřadnice nesplňuje, si povšimli Kopal a Ali (1971) v době, kdy již byly publikovány výsledky numerické integrace Rocheových souřadnic (hlavně v grafické formě v rovinách symetrie, kde se problémy s ortogonalitou neprojevují). Kopal a Ali toto své zjištění chybně interpretovali pouze jako překážku k nalezení analytického tvaru Rocheových souřadnic a zdůvodnění nutnosti počítat jejich tvar numericky. Ve skutečnosti však odtud vyplývá, že souřadnicové čáry (i když se asymptoticky přimykají ke vzájemně kolmým úhlovým sférickým souřadnicím) prodlužováním kolmo na ekvipotenciály přestávají být směrem ke vnějším ekvipotenciálám vzájemně kolmé. Jejich vztah ke kartézským souřadnicím i složky metrického tenzoru v Rocheových souřadnicích lze nalézt např. ve tvaru rozvoje (viz Hadrava 1987a). Protože však podle von Zeipelova teorému, tj. v difúzní aproximaci, splývají s proudnicemi zářivého toku, může být jejich užití stále výhodné pro nalezení vyšších post-von zeipelovských přiblížení (pro speciální případ samostatné rotující hvězdy viz Hadrava 1992).

4 Časově závislý Rocheův model

Jak jsme viděli, předpoklad hydrostatické rovnováhy je neslučitený se zářivou rovnováhou a musí být porušen i v jednoduchém případě synchronně a souose rotující složky dvojhvězdy na kruhové dráze. Je zřejmé, že hydrostatická rovnováha již naprosto nemůže nastat, když se slapová síla působící na některou ze složek mění s čase buď v důsledku excentricity dráhy průvodce, nebo díky asynchronní či sklonu rotační osy hvězdy samotné. Na druhou stranu, předpoklad hydrostatické rovnováhy může i v tomto komplikovanějším případě sloužit alespoň jako první přiblížení k popisu vnitřní stavby příslušné složky dvojhvězdy. (Příkladem může být soustava Země - Měsíc, kde příliv a odliv jsou také jen slabé odchylky od jinak dobře splněné hydrostatické rovnováhy). Proto se nyní budeme zabývat zobecněním Rocheova problému pro případy výstředných drah nebo asynchronní rotace.

V případě časově závislého potenciálu (ať již pro výstřednou dráhu nebo asynchronní rotaci či skloněnou osu rotace nebo pro libovolnou kombinace těchto vlivů) budeme popisovat strukturu každé složky v souřadnicové soustavě $\{r^i\}$ korotující s úhlovou rychlostí Ω^i rotace příslušné hvězdy kolem jejího středu, který se vůči inerciálním souřadnicím $\{x^i\}$ pohybuje po dráze $\mathbf{x}_s(t)$,

$$\mathbf{r} = \exp(\hat{\Omega}t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t)) \ . \tag{27}$$

Zde operátor $\Omega^i{}_j = \epsilon^i{}_{jk}\Omega^k$, takže jeho časová exponenciála je rotační matice $\exp(\hat{\Omega}t) = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t \end{pmatrix}$, v rovině kolmé na vektor Ω. Časová derivace transformace

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_s(t) + \exp(-\hat{\Omega}t)\mathbf{r} \tag{28}$$

inverzní k rov. (27) dává

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_s(t) - \hat{\Omega}\exp(-\hat{\Omega}t)\mathbf{r} + \exp(-\hat{\Omega}t)\dot{\mathbf{r}}\ . \tag{29}$$

Lagrangián hmotného bodu v gravitačním poli složky dvojhvězdy má tvar

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - \Phi_1(\mathbf{x}) - \Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\exp(\hat{\Omega}t)\dot{\mathbf{x}}_s(t) - \hat{\Omega}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}\right)^2 - \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r})\ . \tag{30}$$

Pohybová rovnice této částice je tedy

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2\hat{\Omega}\dot{\mathbf{r}} - \nabla\left(\Phi_1 + \Phi_2 - \frac{1}{2}(\hat{\Omega}\mathbf{r})^2 + (\mathbf{r}\exp(\hat{\Omega}t)\ddot{\mathbf{x}}_s)\right)\ . \tag{31}$$

První člen na pravé straně odpovídá Coriolisově síle, druhý člen je gradient efektivního potenciálu složeného z gravitačního potenciálu obou hvězd, odstředivého potenciálu úměrného čtverci vzdálenosti od rotační osy hvězdy a potenciálu homogenního gravitačního pole odpovídajícího okamžitému zrychlení středu hvězdy v důsledku jejího orbitálního pohybu. Tento potenciál může být pro případ soustředění hmot hvězd do jejich středu zapsán ve tvaru

$$\Phi = -\frac{GM_1}{r} - \frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2(1-\mu^2) + \frac{GM_2 r\lambda}{R^2} \tag{32}$$

(zde $\mathbf{R}(t)$ je okamžitá poloha průvodce, λ je kosinus úhlu mezi $\mathbf{r}$ a $\mathbf{R}$ a μ je kosinus úhlu mezi $\mathbf{r}$ a Ω). Tento výraz se zjednodušuje na rov. (6) pro případ synchronní souosé rotace a kruhové dráhy, při níž je zrychlení hvězdy úměrné vzdálenosti jejího středu od těžiště soustavy $\ddot{\mathbf{x}}_s = -\Omega^2\mathbf{x}_s = \frac{GM_2}{R^3}\mathbf{R}$, takže poslední dva členy lze (až na konstantu) složit do jednoho odstředivého členu s osou rotace posunutou ze středu hvězdy do těžiště dvojhvězdy. Zobecnění Rocheova potenciálu pro (souosou) asynchronní rotaci studoval prvně Kopal (1956), započítal však špatně neinerciální síly. Správný tvar potenciálu Φ pro tento případ zveřejnil Plavec (1958, viz též Kruszewski 1963, Limber 1963 nebo Wilson 1979).

Je zřejmé, že rovnice hydrostatické rovnováhy (9) musí být nyní porušena nejen díky své nekompatibilitě s tepelnou strukturou hvězdy, ale prostě protože časové změny Φ musí způsobit tok hmoty (s rychlostí $\mathbf{v}(x)$) uvnitř hvězdy, které by se měly popisovat rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla^i(\rho v^i) = 0\ , \tag{33}$$

a pohybovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \nabla^i P + \nabla^j(\rho v^i v^j) - 2\rho\Omega^i{}_j v^j + \rho\nabla^i\Phi = 0\ . \tag{34}$$

Tyto rovnice by se měly řešit ve tvaru pulsací nucených časově proměnnou slapovou sílou. Pro pomalou změnu efektivního potenciálu Φ však můžeme předpokládat, že nějaké disipativní procesy utlumí pulsace a hvězdy budou sledovat posloupnost hydrostatických konfigurací odpovídajících okamžitému efektivnímu potenciálu Φ. Toto přiblížení, odpovídající časově proměnnému zobecnění Rocheova modelu, umožňuje odhadnout vlivy orbitálních změn slapových sil na tvar složek a jejich důsledky jak pro přesné světelné křivky, tak pro fázově závislý přetok Rocheovy meze.

5 Změna povrchu hvězdy vlivem proměnnosti slapové síly

K určení která ekvipotenciální plocha odpovídá v každé fázi povrchu hvězdy se zpravidla předpokládá, že objem hvězdy musí být konstantní (srov. např. Wilson 1979). Vezmeme-li však v úvahu, že hvězdná látka je silně stlačitelná, pak je zjevně správnější počítat změny vnitřní stavby hvězdy při měnícím se průběhu efektivního potenciálu a zachovávající se celkové hmotnosti hvězdy (viz Hadrava 1986, zde uvádíme podrobnější výpočet). Kdybychom předpokládali, že tepelná struktura hvězdy $T(\rho)$ se nezmění (např. že bude dána stále stejným polytropickým průběhem, nemusí to však být přesně splněno např. díky změněnému režimu přenosu záření) a stavovou rovnici lze tedy zjednodušit na závislost $P = P(\rho)$, integrací rovnice (9) hydrostatické rovnováhy lze získat rozložení hustoty ve hvězdném nitru ve tvaru funkce

$$\rho = \rho(\Phi - \Phi_0) \ , \tag{35}$$

kde Φ_0 je hodnota potenciálu na povrchu hvězdy, tj. $\rho(\Phi = \Phi_0) = 0$, $P(\Phi = \Phi_0) = 0$. V průběhu orbitálního pohybu se efektivní potenciál (32) mění ($\delta\Phi(\mathbf{r}) \neq 0$) v důsledku závislosti slapové síly na měnícím se R a λ. Proto se vnitřní stavba hvězdy $\rho(\mathbf{r})$ i povrchový potenciál Φ_0 musí měnit tak, aby se zachovávala celková hmota

$$0 = \delta M = \delta \int \rho d^3r = \int \frac{d\rho}{d\Phi} \left[\delta\Phi(\mathbf{r}) - \delta\Phi_0\right] d^3r \ , \tag{36}$$

tj.

$$\delta\Phi_0 = \frac{\int \frac{d\rho}{d\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial t} d^3r}{\int \frac{d\rho}{d\Phi} d^3r} \delta t \ . \tag{37}$$

Vynecháme-li prostorově konstantní část potenciálu $-\frac{GM_2}{R}$, můžeme potenciál (32) rozdělit do dvou částí: první

$$\bar{\Phi}(\mathbf{r}) = -\frac{GM_1}{r} - \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 \ , \tag{38}$$

která je sféricky symetrická a časově nezávislá, a druhé

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) = -\frac{GM_2}{R} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k P_k(\lambda) + \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 P_2(\mu) \ , \tag{39}$$

která je její časově proměnná asymetrická porucha, která při středování po sféře $r = konst.$ vymizí,

$$\langle\tilde{\Phi}\rangle = 0 \tag{40}$$

(P_k jsou Legendreovy polynomy). Taylorovým rozvojem rov. (35)

$$\left[\frac{d\rho}{d\Phi}\right]_{\Phi(\mathbf{r})} = \left[\frac{d\rho}{d\Phi}\right]_{\bar{\Phi}(\mathbf{r})} + \left[\frac{d^2\rho}{d\Phi^2}\right]_{\bar{\Phi}(\mathbf{r})} \tilde{\Phi}(\mathbf{r}) + o(\tilde{\Phi}^2) \tag{41}$$

a pomocí podmínky (40), můžeme (37) přepsat ve tvaru

$$\delta\Phi_0 \simeq \frac{\int \langle \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t}\tilde{\Phi}\rangle \left[\frac{d^2\rho}{d\Phi^2}\right]_{\bar{\Phi}(\mathbf{r})} r^2 dr}{\int \left[\frac{d\rho}{d\Phi}\right]_{\bar{\Phi}(\mathbf{r})} r^2 dr}\delta t \; . \tag{42}$$

Podle (39)

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t}\tilde{\Phi}\rangle &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle\tilde{\Phi}^2\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle\left[-\frac{GM_2}{R}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k P_k(\lambda) + \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 P_2(\mu)\right]^2\rangle = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{G^2M_2^2}{2R^2}\sum_{k,l=2}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{k+l}\langle P_k(\lambda)P_l(\lambda)\rangle - \right. \\
&\left. -\frac{GM_2}{3R}\Omega^2 r^2 \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k \langle P_k(\lambda)P_2(\mu)\rangle + \frac{1}{18}\Omega^4 r^4 \langle (P_2(\mu))^2\rangle\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{G^2M_2^2}{2R^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k} - \frac{GM_2}{15R^3}\Omega^2 r^4 P_2(\cos\theta) + \frac{1}{90}\Omega^4 r^4\right] \; ,
\end{aligned} \tag{43}$$

kde $\theta = \theta(t)$ je úhel mezi osou rotace Ω a směrem R k průvodci. Vynecháním posledního časově nezávislého členu a substitucí (43) do (42) dostáváme

$$\delta\Phi_0 \simeq \frac{d}{dt}\left[\frac{G^2M_2^2}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f_k R^{-2k-2}}{2k+1} - \frac{GM_2}{15R^3}\Omega^2 f_2 P_2(\cos\theta)\right]\delta t \; , \tag{44}$$

kde koeficienty

$$f_k = \frac{\int \left[\frac{d^2\rho}{d\Phi^2}\right]_{\bar{\Phi}(\mathbf{r})} r^{2k+2} dr}{\int \left[\frac{d\rho}{d\Phi}\right]_{\bar{\Phi}(\mathbf{r})} r^2 dr} \tag{45}$$

závisejí pouze na střední stavbě hvězdného nitra, jsou však nezávislé na poloze průvodce. Rovnici (44) tedy můžeme integrovat a získat hodnotu potenciálu na povrchu jako funkci času

$$\Phi_0(t) - C \simeq \frac{G^2M_2^2}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f_k R^{-2k-2}}{2k+1} - \frac{GM_2}{15R^3}\Omega^2 f_2 P_2(\cos\theta) \; , \tag{46}$$

kde C je integrační konstanta odpovídající povrchové hodnotě potenciálu v nepřítomnosti průvodce (tj. pro $R \to \infty$). Když $f_k > 0$ (což je splněno pro dostatečně tvrdou stavovou rovnici), potenciál roste s klesajícím R.

Okamžitý efektivní poloměr $r_0 = r_0(t)$ hvězdy můžeme definovat jako poloměr, ve kterém má sféricky symetrická část (38) potenciálu hodnotu $\Phi_0(t)$. to znamená, že je dán implicitní rovnicí

$$-\frac{GM_1}{r_0} - \frac{1}{3}\Omega^2 {r_0}^2 = C + \frac{G^2M_2^2}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f_k R^{-2k-2}}{2k+1} - \frac{GM_2}{15R^3}\Omega^2 f_2 P_2(\cos\theta) \; . \tag{47}$$

Jestliže průvodce je blízko rovníkové rovině rotující hvězdy (což je vždy když rovina rovníku rotace a oběžná rovina jsou koplanární), předposlední a poslední člen na pravé straně je kladný a oba tyto členy pomáhají rozpínání hvězdy (zvětšování jejího poloměru r_0). Tento jev je větší v periastru a pomáhá zesílení přetoku Rocheovy meze v periastru. Když je rotační osa hodně skloněná, hvězda se slapově rozepne dvakrát během oběžné periody když průvodce prochází rovníkem, zatímco když je průvodce blízko pólů slapy částečně kompensují rotační zploštění a způsobují smrštění hvězdy.

Reference

[1] Cayley M. A. 1872, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 75, 324, 381

[2] Chandrasekhar S. 1969, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, New Haven, Yale University Press

[3] Darboux J. G. 1898, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Paris

[4] Eggleton P. P. 1983 ApJ 268, 368-369

[5] Hadrava P. 1979, “Kinetická teorie rozsáhlých hvězdných atmosfér”, disertační práce, AsÚ ČSAV

[6] Hadrava P. 1981, Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. No. 57, 7

[7] Hadrava P. 1986, Hvar Obs. Bull. 10, 1 (errata – 1987, Hvar Obs. Bull. 11, 151)

[8] Hadrava P. 1987a, Astrophys. Sp. Sc. 138, 61

[9] Hadrava P. 1987b, Publ. Astron. Inst. CS. Ac. Sci. No. 70, 263

[10] Hadrava P. 1988, Publ. des Astrophys. Obs. zu Potsdam Nr. 114, Band 33, Heft 2, 11

[11] Hadrava P. 1992, Astron. & Astrophys. 256, 519

[12] Hadravová A., Hadrava P. 2004: “Johannes Kepler – Sen, neboli Měsíční astronomie”, Paseka a NTM, Praha a Litomyšl

[13] Kallrath J., Milone E. F. 1999, *Eclipsing Binary Stars, Modeling and Analysis*, Springer, New York

[14] Kopal Z. 1956, Ann. d’Astrophys. 19, 298

[15] Kopal Z. 1970, Astrophys. Sp. Sc. 8, 149

[16] Kopal Z. 1989, *The Roche Problem*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers

[17] Kopal Z., Ali A. K. M. S. 1971, Astrophys. Sp. Sc. 11, 423

[18] Kruszewski A. 1963, Acta Astronomica 13, 106

[19] Limber D. N. 1963, Astrophys. J. 138, 1111

[20] Plavec M. 1958, Mém. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 411

[21] Roche E. A. 1850, Mém. de l’Acad. des. Sci de Montpellier 2, 21

[22] Roche E. A. 1873, Mém. de l’Acad. des. Sci de Montpellier 8, 235

[23] Wilson R. E. 1979, Astrophys. J. 234, 1054

[24] von Zeipel H. 1924a, MNRAS 84, 665

[25] von Zeipel H. 1924b, MNRAS 84, 784

[26] von Zeipel H. 1924c, MNRAS 84, 702

A Matematické doplňky

Laplaceův operátor Ve sférických souřadnicích $\{r, \vartheta, \varphi\}$ spojených s kartézskými souřadnicemi $\{x, z, y\}$ transformací

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi && (48) \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi && (49) \\ z &= r \cos\vartheta && (50) \end{aligned}$$

a zpětnou transformací

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} && && (51) \\ \mathrm{cotg}\vartheta &= z(x^2 + y^2)^{-1/2} && \partial_\vartheta = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_{\mathrm{cotg}\vartheta} && (52) \\ \mathrm{tg}\vartheta &= \frac{y}{x} && \partial_\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}\partial_{\mathrm{tg}\varphi} && (53) \end{aligned}$$

jsou složky ∇ operátoru

$$\begin{aligned} \partial_x &= \sin\vartheta\cos\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\partial_\vartheta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi && (54) \\ \partial_y &= \sin\vartheta\sin\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\partial_\vartheta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi && (55) \\ \partial_z &= \cos\vartheta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\vartheta\partial_\vartheta && (56) \end{aligned}$$

a Laplaceův operátor

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_y^2 = && (57) \\ &= \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 + \frac{\mathrm{cotg}\vartheta}{r^2}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2 && (58) \\ &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2 \,. && (59) \end{aligned}$$

Poissonova rovnice

$$\Delta f = g \tag{60}$$

má řešení

$$f(r) = \int \mathcal{G}(r, r')g(r')d^3r' \,, \tag{61}$$

kde Greenova funkce[1]

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{-1}{4\pi|r - r'|} \,. \tag{62}$$

Tu můžeme pro $|r'| < |r|$ rozvinout do řady (pro $|r'| > |r|$ zaměníme r a r')

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\cos\gamma\frac{r'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) \,, \tag{63}$$

[1] V n-dim. prostoru $\mathcal{G}(r, r') = \frac{-1}{2(n-2)}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})|r - r'|^{2-n}$, resp. $\frac{1}{2\pi}\ln|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|$ pro $n = 2$.

kde γ je úhel mezi r a r' a P_n jsou Legendreovy polynomy dané vztahy (první je tzv. Rodriguezova formule)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\mu^{n-2k} \ , \tag{64}$$

(tj. $P_0(\mu)=1$, $P_1(\mu)=\mu$, $P_2(\mu)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1)$, ..., odkud $(1-\mu^2)=\frac{2}{3}(P_0(\mu)-P_2(\mu))$), které splňují diferenciální rovnici

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}P_n(\cos\vartheta)) + n(n+1)P_n = 0 \ . \tag{65}$$

Legendreovy polynomy jsou ortogonální

$$\int_{-1}^{1} P_k(\mu)P_l(\mu)d\mu = \frac{2}{2k+1}\delta_{kl} \ . \tag{66}$$

Pro jednotkové vektory n a n' platí

$$P_l(n.n') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(n')Y_{lm}(n) \ , \tag{67}$$

kde sférické harmoniky

$$Y_{lm}(n) = (-1)^m\left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\exp im\varphi \ , \tag{68}$$

a přidružené Legendreovy funkce (stupně l a řádu m) jsou

$$P_l^m(\cos\vartheta) = \sin^m\vartheta\frac{d^m}{(d\cos\vartheta)^m}P_l(\cos\vartheta) \tag{69}$$

(tj. $Y_{00}=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$, $Y_{1\pm1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta \mathrm{e}^{\pm i\varphi}$, $Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{3\cos^2\vartheta-1}{2}$, $Y_{2\pm1}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\vartheta\sin\vartheta \mathrm{e}^{\pm i\varphi}$, $Y_{2\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta \mathrm{e}^{\pm 2i\varphi}$). Ty splňují rekurentní vztahy

$$\mu P_l^m(\mu) = \frac{1}{2l+1}[(l+1-m)P_{l+1}^m(\mu)+(l+m)P_{l-1}^m(\mu)] \tag{70}$$

a relace ortogonality

$$\int_{-1}^{+1} P_k^m(\mu)P_l^m(\mu)d\mu = 2\frac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{kl} \ . \tag{71}$$

B Rotačně orbitální vazba: soustava Země – Měsíc

Moment hybnosti rotujícího tělesa je

$$L_{rot} = J\omega = kMr^2\omega \ , \qquad k < 1 \ , \tag{72}$$

takže $L_{rot\ Msce} << L_{rot\ Zem+}$. Orbitální moment hybnosti soustavy

$$L_{orb} = \left[M \left(\frac{mR}{M+m} \right)^2 + m \left(\frac{MR}{M+m} \right)^2 \right] \Omega = \frac{Mm}{M+m} R^2 \Omega \simeq mR^2\Omega \ . \tag{73}$$

Celkový moment hybnosti je

$$L = J\omega + mR^2\Omega \ , \tag{74}$$

celková kinetická energie je

$$E = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} mR^2\Omega^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2} J\omega^2 - \frac{GmM}{2R} \ , \tag{75}$$

neboť podle třetího Keplerova zákona

$$R^3\Omega^2 = GM \ . \tag{76}$$

V důsledku slapového tření se mění ω. Vzhledem k zachování momentu hybnosti

$$0 = \dot{L} = J\dot{\omega} + mR^2\dot{\Omega} + 2mR\dot{R}\Omega \tag{77}$$

se mění i Ω a R svázané podle (76) vztahem

$$2\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + 3\frac{\dot{R}}{R} = 0 \ , \tag{78}$$

ale disipuje kinetická energie

$$0 > \dot{E} = J\omega\dot{\omega} + \frac{GmM}{2R^2}\dot{R} = -\frac{1}{2} mR\Omega(\omega - \Omega)\dot{R} \ . \tag{79}$$