

Vybrané kapitoly z fyziky kosmického plazmatu

P. Hadrava
*Astronomický ústav AVČR,
251 65 Ondřejov*

www.asu.cas.cz/~had/zfp.pdf

11. dubna 2023

Obsah

1	Základy teorie plazmatu	3
1.1	Kinetický popis plazmatu	3
1.1.1	Kinetická rovnice	3
1.1.2	Ionizační rovnováha a Debyovské stínění	5
1.1.3	Boltzmannova rovnice	8
1.1.4	Momentové rovnice a hydrodynamická aproximace	11
1.1.5	Magnetohydrodynamika	15
1.2	Srážkový člen	19
1.2.1	Binární srážky	19
1.2.2	Obecný tvar	20
1.2.3	Momentový rozvoj	21
1.3	Termodynamická rovnováha	24
1.3.1	Entropie a H–teorém	24
1.3.2	Rovnovážné rozdělení	25
1.3.3	Rovnováha chemických reakcí	27
2	Teorie kosmického plazmatu	30
2.1	Zářivá hydrodynamika	30
2.1.1	Klasická teorie přenosu záření	30
2.1.2	Fenomenologická hydrodynamika a zářivá hydrodynamika	32
2.1.3	Radiální akrece a hvězdný vítr	34
2.1.4	Rázové vlny	37
2.2	Relativistická kinetická teorie	39
2.2.1	Fázový prostor	40
2.2.2	Liouvilleův teorém a Boltzmannova rovnice	41
2.2.3	Makroskopické veličiny a jejich dynamické vztahy	42
2.2.4	Lokálně dynamicky symetrické rozdělení	45
2.3	Numerické metody dynamiky plynů	47
2.3.1	Metody sítí	48
2.3.2	N-částicové metody	52
A	Výběr z diferenciální geometrie	55
A.1	Tenzorová algebra	55
A.1.1	Vektory a kovektory, tenzorový součin a úžení	55
A.1.2	Vnější algebra	56
A.1.3	Skalární součin	57
A.2	Tenzorová analýza	58

A.2.1	Tečné vektory a n -formy na varietách	58
A.2.2	Afinní konexe	61
A.2.3	Riemannovská geometrie	63
A.3	Lieova derivace a Killingovy vektory	65
	Literatura	68

Kapitola 1

Základy teorie plazmatu

Tato kapitola shrnuje látku přednesenou autorem v zimním semestru 2013/2014 v rámci přednášky NTMF020 “Základy teorie plazmatu”. Další část tohoto předmětu tvoří přednášky dr. R. Pánka.

1.1 Kinetický popis plazmatu

Plazma je silně ionizovaný plyn. Pro chování plazmatu jako celku jsou proto důležité nejen vzájemné srážky jeho částic, ale také elektromagnetická interakce, především působení vnějšího nebo kolektivního magnetického pole, zároveň však i interakce se zářením. Pro velmi řídké plazma lze dynamiku plazmatu do značné míry odvodit z pohybových rovnic nabitých částic ve vnějším poli. Při vyšších hustotách nabývá na důležitosti kolektivní chování částic,¹ k jehož matematickému popisu je třeba vycházet ze statistických metod kinetické teorie. Z té lze užitím zjednodušujících předpokladů odvodit i magnetohydrodynamické rovnice, jak ukážeme v této podkapitole.

1.1.1 Kinetická rovnice

Vyšetřujeme nejprve pravděpodobnost obsazení f^i v systému s konečným počtem stavů $\{i|_{i=1}^n\}$ (např. excitační stavy elektronu v atomu vodíku). Pro časový vývoj obsazení stavů nekvantového systému² platí tzv. kinetická rovnice

$$\frac{d}{dt}f^i = \sum_j (P_{ji}f^j - P_{ij}f^i), \quad (1.1)$$

kde P_{ij} je pravděpodobnost přechodu systému ze stavu i do stavu j za jednotku času. V důsledku symetrie kvantově mechanického popisu vůči inverzi času platí (pro přechod mezi elementárními kvantovými stavy) princip vratnosti

$$P_{ij} = P_{ji}, \quad (1.2)$$

a v důsledku zachování energie (a tedy homogenity v čase) jsou možné přechody pouze mezi stavy se stejnou energií E^i ,

$$P_{ij} \sim \delta(E^i - E^j). \quad (1.3)$$

¹V užším smyslu slova bývá plazma definováno právě jako kvazineutrální plyn dominovaný kolektivním chováním. V reálném vesmíru ovšem není ostrá hranice mezi plazmatem a dalšími stavy látky a v chování plazmatu často hrají podstatnou roli i další procesy.

²V odstavci 1.2.2 se budeme zabývat modifikací tohoto vztahu pro kvantový případ fermionové nebo bosonové povahy systému. To může být důležité např. pro volné stavy elektronů v plazmatu. Pro diskrétní stavy ovšem zpravidla předpokládáme jediný elektron v poli jádra, resp. statistiku excitací vzájemně nezávislých iontů.

To platí pro izolovanou soustavu. Pokud je soustava v interakci s vnější soustavou ('tepelným rezervoárem'; např. s kinetickými stupni volnosti okolních vodíkových atomů, nebo s polem záření) popsanou obsazovacími čísly F^k ve svých stavech, musíme vyjít z rovnice (1.1) pro sjednocení obou podsoustav

$$\frac{d}{dt}(f^i F^k) = \sum_{jl} (P_{jl,ik} f^j F^l - P_{ik,jl} f^i F^k). \quad (1.4)$$

Pouze pro toto sjednocení nyní platí vratnost i zachování energie ($P_{ik,jl} = P_{jl,ik} \sim \delta(E^i + E^k - E^j - E^l)$). Jestliže rezervoár můžeme považovat za stacionární, $\frac{d}{dt} F^k = 0$, pak vystředováním rov. (1.4) přes rozdělení F^k dostaneme formálně opět rov. (1.1), kde ovšem pravděpodobnosti přechodu sledované podsoustavy

$$P_{ji} \equiv \frac{\sum_{kl} P_{jl,ik} F^l}{\sum_m F^m}, \quad P_{ij} \equiv \frac{\sum_{kl} P_{ik,jl} F^k}{\sum_m F^m}, \quad (1.5)$$

samostatně nesplňují ani (1.2) ani (1.3). Pokud naše sledovaná soustava interaguje současně s více vnějšími soustavami (např. opět excitační stupně volnosti se zářením i srážkově s nalétávajícími částicemi), můžeme celkové pravděpodobnosti přechodu zapsat jako součet příspěvků od jednotlivých procesů ($P_{ij} = P_{ij}^{\text{rad}} + P_{ij}^{\text{col}}$).

Rovnice (1.1) můžeme integrovat v čase, přičemž vycházíme ze zvolených počátečních podmínek. Výsledkem integrace je exponenciální relaxace do stavu, v němž mají všechny stavy (mezi nimiž může docházet k přechodům a mají tedy stejnou energii ev. další zachovávající se veličiny) stejné obsazení. Např. pro dvou-stavový systém má kinetická rovnice (1.1) tvar

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & P \\ P & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

a její časové řešení

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} (t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_1 + f_2 \\ f_1 + f_2 \end{pmatrix}_{t=0} + \frac{1}{2} \exp(-2Pt) \begin{pmatrix} f_1 - f_2 \\ f_2 - f_1 \end{pmatrix}_{t=0}. \quad (1.7)$$

Cvičení 1 *Napište a vyřešte kinetickou rovnici pro troj-stavový systém, ve kterém pravděpodobnosti přechodů $P_{23} = 0 < P_{13} = \varepsilon P_{12}$. Diskutejte případ $\varepsilon \ll 1$.*

Můžeme tedy hledat stacionární řešení kinetické rovnice, $\frac{d}{dt} f^i = 0$, ke kterému by měly stavy asymptoticky konvergovat. V tom případě se kinetická rovnice redukuje na soustavu lineárních algebraických rovnic statistické rovnováhy

$$0 = \sum_j (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i). \quad (1.8)$$

Tato soustava je homogenní a protože vzhledem ke svému fyzikálnímu smyslu má mít netriviální řešení, musí být singulární (což vyplývá i z rov. (1.2)). Proto k ní musíme doplnit normovací podmínku, např.

$$\sum_i f^i = 1. \quad (1.9)$$

Jak si ukážeme v odstavci 1.3, v termodynamické rovnováze je obsazení jednotlivých stavů dáno jistými funkcemi jejich energie, parametrizovanými teplotou. Rovnovážnému rozdělení se stejnou teplotou musí odpovídat všechny vzájemně interagující stupně volnosti všech částic. Jestliže některý z nich má odlišné rozdělení, může způsobit odchylky od rovnováhy i ostatních stupňů

volnosti. Pokud pravděpodobnosti přechodů mezi různými stavy jistého podsystemu jsou mnohem větší než jeho interakce s ostatními (např. nerovnovážnými) podsystemy, může se ustavit jeho vnitřní rozdělení velmi blízké rovnovážnému s takovou teplotou, při které je splněna jeho energetická rovnováha s ostatními podsystemy. Takový předpoklad může podstatně snížit počet neznámých v soustavě kinetických rovnic a tím zjednodušit její řešení. Pro stavy, jejichž interakci s nerovnovážnými podsystemy nelze zanedbat, je třeba vyjádřit všechny pravděpodobnosti přechodů (tzv. ‘rate(s)’) a řešit pro ně kinetické rovnice.

Příkladem mohou být hvězdné atmosféry, kde srážky mezi kinetickými stupni volnosti zpravidla dosti dobře zabezpečují ustavení termodynamické rovnováhy s kinetickou teplotou, která je ovšem závislá na hloubce v atmosféře (tzv. lokální termodynamická rovnováha, LTE). Naproti tomu záření je spektrálně i směrově odlišné od Planckova rovnovážného záření černého tělesa, protože z hlubších vrstev s vyšší teplotou přichází teplejší a z vnějších vrstev chladnější záření a tyto odchylky jsou větší ve frekvencích, ve kterých má atmosférický materiál menší opacitu a tedy větší střední volnou dráhu fotonů. Excitační stupně volnosti interagují srážkově s kinetickými stupni volnosti, čímž se jejich rozdělení přibližuje LTE, ale současně zářivé přechody (zejména v nejsilnějších čarách) mohou tuto rovnováhu narušovat a způsobovat NLTE (‘non-LTE’) rozdělení především základní a nejnižších excitovaných hladin vzhledem ke kontinuu a jeho kinetické teplotě. Protože prostřednictvím přeskoků do těchto nerovnovážných hladin se také vyměňuje energie mezi kinetickými stupni volnosti a zářením, může výsledek řešení NLTE podstatně ovlivnit i prostorovou závislost teploty těch stupňů volnosti, které v LTE jsou.

Ještě extrémnějším případem je statistická rovnováha okolohvězdné a mezihvězdné hmoty, kde díky nízké hustotě a tedy malému vzájemnému rušení mají ionty velký počet diskretních hladin. Jejich obsazení je dominováno interakcí se zářením centrálních (pro planetární mlhoviny) či okolních hvězd. Toto záření má spektrum odpovídající teplotám řádu 10^4K , ale díky velkému zředění hustotu odpovídající teplotám řádu pouze $10^{1\pm 1}\text{K}$. V rovnici statistické rovnováhy proto zpravidla převažují členy fotoinizace ze základní (nejpopulovanější) hladiny, rekombinace do vyšších hladin a deexcitace, tj. postupné kaskádování zpět do nižších hladin.

1.1.2 Ionizační rovnováha a Debyovské stínění

I když plazma může být i v nerovnovážném stavu, předpoklad termodynamické rovnováhy, kterému je věnována kapitola 1.3, často umožňuje alespoň přibližně popsat jeho vlastnosti. Předpokládejme tedy, že částice plazmatu obsazují diskretní stavy (např. vnitřní stupně volnosti) i spojité (např. kinetické) stupně volnosti s pravděpodobností danou Boltzmannovým rovnovážným rozdělením $f \sim \exp(-E/kT)$, kde E je energie stavu, k je Boltzmannova konstanta a T je teplota, která rozdělení parametrizuje.³ V termodynamické rovnováze je počet n_i subsytémů ve stavu i

$$n_i = \frac{n}{Z} \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \quad (1.10)$$

kde E_i je energie stavu i , n je celkový počet subsytémů ve všech stavech a

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \quad (1.11)$$

je tzv. stavová suma.

Pokud stavem i rozumíme např. elementární kvantový stav elektronové obálky vodíku podobného iontu, pak tento index zastupuje čtveřici kvantových čísel n, l, m, s , přičemž energie elektronu v

³Speciálním případem je Maxwellovo rozdělení rychlostí v částic, které dostaneme pro kinetickou energii částic $E = mv^2/2$, nebo barometrická formule pro potenciální energii částic $E = m\varphi$.

tomto stavu je v aproximaci Bohrova modelu dána pouze hlavním kvantovým číslem, $E_n = E_1/n^2$, a je stejná pro $g_n = 2n^2$ elementárních stavů ($l = 0, 1, \dots, n-1$, $m = -l, \dots, l$, $s = \pm 1$). Proto se vyjádření stavové sumy zpravidla zjednodušuje na součet přes všechny rozdílné energetické hladiny $i \equiv n$

$$Z = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \quad (1.12)$$

Pokud je $kT \ll |E_1|$, pak (vzhledem k tomu, že $E_1 < 0$, např. pro základní hladinu vodíku $-E_1 \simeq 13.6\text{eV} \simeq k \cdot 157887\text{K}$) je $n_1 \gg n_2 \gg n_3 \dots$, ale stavová suma by přesto pro nekonečný počet hladin divergovala, protože samotná exponenciála v ní pro $i \rightarrow \infty$ konverguje k jedničce a váha g_i stavu i kvadraticky roste. Bohrov model ovšem popisuje idealizovaný stav jediného atomu v nekonečném prostoru a střední poloměry elektronových drah v něm s hlavním kvantovým číslem rostou ($\langle r \rangle \simeq r_1(3n^2 - l(l+1))/2$, kde $r_1 = h^2/(4\pi^2 m_e e^2) \simeq 0,529 \cdot 10^{-10}\text{m}$ je Bohrov poloměr), takže v reálném plynu jsou vysoké excitované stavy rušeny polem okolních částic. Tomu do jisté míry odpovídá také např. Inglisův – Tellerův vztah

$$\log(n_i + n_e) \simeq 23.491 - 7.5 \log(n_m) \quad (1.13)$$

pro nejvyšší Balmerovu čáru z hladiny n_m pozorovatelnou ve spektru atmosféry hvězdy s hustotami iontů n_i a elektronů n_e (na cm^3), než její rozšíření Starkovým jevem způsobí splynutí se sousední hladinou.

Rovnice (1.10) určuje také stupeň ionizace v termodynamické rovnováze. Výpočet relativního obsazení diskretních (např. excitačních) i spojitých stavů (ve fázovém prostoru) v rovnováze pomocí Boltzmannova rozdělení je přímočarý. Při výpočtu ionizační rovnováhy ovšem musíme vzájemně porovnávat počty elementárních kvantových diskretních i spojitých stavů. Fázový prostor tedy musíme kvantovat pomocí relací neurčitosti, abychom dostali spočetnou (stále však nekonečnou) množinu elementárních stavů o fázovém objemu $d^6\Gamma = d^3x d^3p \simeq h^3$. Proces ionizace a rekombinace



kde $X_{i,j}$ je j -krát ionizovaný prvek X_i a e je elektron, můžeme chápat jako chemickou reakci (srov. kapitolu 1.3.3) a její levou a pravou stranu za dva různé stavy (přesněji dvě množiny elementárních stavů, které označíme L a P) téže fyzikální soustavy. Potom

$$n_L = n \frac{Z_L}{Z}, \quad n_P = n \frac{Z_P}{Z}, \quad (1.15)$$

kde

$$n = n_L + n_P, \quad Z = Z_L + Z_P, \quad (1.16)$$

a stavové sumy každé strany chemické reakce lze napsat jako součin stavových sum příslušejících jednotlivým stupňům volnosti α (vnitřním i kinetickým),

$$Z_{L,P} = \sum_i \exp\left(-\frac{1}{kT} \sum_\alpha E_{i,\alpha}\right) = \prod_\alpha \sum_i \exp\left(-\frac{1}{kT} E_{i,\alpha}\right). \quad (1.17)$$

Stavovou sumu příslušející nerelativistickému translačnímu pohybu částice o hmotnosti m můžeme napsat jako součet přes elementární kvantové stavy velikosti $d^6\Gamma = d^3x d^3p \simeq h^3$ ve fázovém prostoru

$$Z_{\text{tr}} = \int \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) \frac{d^3x d^3p}{h^3} = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}, \quad (1.18)$$

kde V je jednotkový objem, a stavovou sumu vnitřních stupňů volnosti iontu $X_{i,j}$ jako součin stavové sumy odpovídající ionizační energii $|E_{i,j,1}|$ ze základní hladiny (tj. jednoduchého součinitele $\exp(-E_{i,j,1}/kT)$, kde $E_{i,j,1} < 0$) a sumy odpovídající excitační energii $E_{i,j,1} - E_{i,j,k}$ do hladiny k

$$U_{i,j} = \sum_k \exp\left(\frac{E_{i,j,1} - E_{i,j,k}}{kT}\right). \quad (1.19)$$

Z rovnice (1.15) tak můžeme odvodit **Sahovu rovnici** ionizační rovnováhy

$$\frac{n_{i,j+1}n_e}{n_{i,j}} \equiv \frac{n_P}{n_L} = \frac{Z_P}{Z_L} = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{E_{i,j,1}}{kT}\right) \frac{U_{i,j+1}}{U_{i,j}} \equiv K_{ij}, \quad (1.20)$$

kde $n_{i,j}$ a n_e jsou nyní číselné hustoty iontů $X_{i,j}$ a elektronů (tj. jejich počty v jednotkovém objemu V). Koeficient 2 před Z_{tr} volných elektronů odpovídá jejich vnitřnímu stupni volnosti orientace spinu, na němž jejich energie nezávisí. Stavové sumy Z_{tr} iontů jsme zkrátili v přiblížení $m_{i,j} \simeq m_{i,j+1}$, přesněji bychom měli m_e nahradit redukovanou hmotou elektronu $m_e m_{i,j+1}/m_{i,j}$. Doplňme-li podmínku kvasineutrálnosti

$$n_e = \sum_{i,j} j n_{i,j}, \quad (1.21)$$

můžeme pro zadané hustoty $n_i = \sum_j n_{i,j}$ jednotlivých druhů částic řešením soustavy rovnic (1.20) vypočítat elektronovou hustotu n_e a stupně ionizace všech částic.

Cvičení 2 *Odvod'te a řešte Sahovu rovnici pro čistě vodíkové plazma.*

Z předpokladu Boltzmannova rovnovážného rozdělení můžeme odvodit také například střední hustotu prostorového rozdělení kladně i záporně nabitých částic v okolí každé zvolené nabitě částice. Hustota n_q částic s nábojem q ve vzdálenosti r od zvolené částice s nábojem Q je tedy

$$n_q(r) = n_{q0} \exp\left(-\frac{q\phi(r)}{kT_q}\right) \simeq n_{q0} \left(1 - \frac{q\phi}{kT_q} + o(\phi^2)\right), \quad (1.22)$$

kde n_{q0} je střední hustota a T_q teplota těchto částic a $\phi(r)$ je elektrostatický potenciál. Ten je řešením Poissonovy rovnice

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi \left(Q\delta(r) + \sum_q q n_q\right) \simeq 4\pi \left(Q\delta - \sum_q \frac{q^2 n_{q0}}{kT_q} \phi\right). \quad (1.23)$$

V úpravě této rovnice jsme využili předpokladu kvasineutrálnosti plazmatu $\sum_q q n_{q0} = 0$ a zanedbali jsme členy nelineární ve ϕ . Řešení této rovnice má tvar⁴

$$\phi = \frac{Q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (1.24)$$

kde

$$\lambda_D^{-2} = 4\pi \sum_q \frac{q^2 n_{q0}}{kT_q} \quad (1.25)$$

⁴Shodný tvar má také Yukawův potenciál v jaderné fyzice.

udává tzv. Debyeův stínící poloměr λ_D , na škále jehož velikosti je exponenciálně tlumen coulombický potenciál náboje q zvolené částice.⁵

Aby mohly být užity postupy tohoto statistického výpočtu, musí být splněna podmínka, že uvnitř objemu o velikosti λ_D se nachází velký počet nabitých částic, čili že tzv. plazmový parametr

$$\Lambda \equiv \sum_q n_{q0} \lambda_D^3 \gg 1. \quad (1.26)$$

V rozvoji (1.22) jsme k tomu užili předpokladu, že kinetická energie částic v Debyeově sféře je mnohem větší než jejich potenciální energie

$$kT_q \gg q\phi(r) \simeq \frac{q^2}{\lambda_D}. \quad (1.27)$$

V případě jednoduchého Bohrova modelu atomu vodíku (a podobně i pro složitější atomy) je nekonečný také počet vázaných stavů, v nichž mají elektrony nižší energii a tedy větší pravděpodobnost výskytu než ve volných ionizovaných stavech. To by ovšem platilo pouze pro atom osamocený v celém vesmíru. Ve vyšších hladinách jsou vlnové funkce prostorově rozlehlejší a proto jsou v reálném plynu či plazmatu rušeny okolními částicemi. Faktický počet hladin je tedy konečný a musí být omezen v závislosti na hustotě částic. Alternativní způsob odhadu počtu stabilních hladin je založen na řešení Schrödingerovy v debyeovsky stíněném potenciálu, v němž je počet vázaných stavů redukován v závislosti na velikosti stínění. V poruchovém přiblížení mají vyšší hladiny pozitivní energii a jsou tedy nestabilní.

1.1.3 Boltzmannova rovnice

Předpokládejme, že plyn se skládá z velkého počtu (N) částic jednoho druhu, jejichž stav je popsán souřadnicemi x^i a hybnostmi p_i ($i = 1, 2, 3$). Stav plynu lze potom popsat tzv. jednočásticovou rozdělovací funkcí $f = f(t, x^i, p_i)$ udávající počet částic v jednotkovém objemu fázového prostoru

$$d^6 N = f(t, x^i, p_i) d^3 x d^3 p. \quad (1.28)$$

Za jednotku fázového objemu můžeme zvolit objem elementárního kvantového stavu ($d^6 \Gamma = (dx dp)^3 \sim h^3$) a f potom bude znamenat pravděpodobnost obsazení stavu.

Z jednočásticové rozdělovací funkce f můžeme vypočítat některé makroskopické veličiny charakterizující plyn. Z nich nejdůležitější jsou hustota částic n (hmoty ρ), hustota hybnosti π (rychlost v) a složky tenzoru napětí T (vůči souřadnicové soustavě, resp. τ vůči vlastní klidové soustavě plynu), tj. složky tenzoru energie-hybnosti, které jsou dány jako momenty f

$$n = \rho/m = \langle f \rangle \equiv \int f d^3 p \quad (1.29)$$

$$\pi^i = \rho v^i = \langle p_i f \rangle \equiv \int p_i f d^3 p \quad (1.30)$$

$$mT^{ij} = m(\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = \langle p_i p_j f \rangle \equiv \int p_i p_j f d^3 p, \quad (1.31)$$

⁵V literatuře se někdy traduje chybné tvrzení, že k debyeovskému stínění přispívají pouze elektrony, protože ionizované atomy jsou těžké a málo pohyblivé. Rovnovážné řešení ovšem nezávisí na tepelné rychlosti různých částic a z kvadratické závislosti na q je zřejmé, že jednou ionizované atomy přispívají ke stínění stejně a vícekrát ionizované atomy dokonce ještě více než elektrony.

kde m je hmotnost jedné částice. Ze stopy tenzoru napětí můžeme vypočítat i hustotu kinetické energie (nerelativistických částic)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) = \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon_0 = \left\langle \frac{1}{2m} p_i p_i f \right\rangle \equiv \int \frac{p^2}{2m} f d^3 p, \quad (1.32)$$

kde $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \sum_i \tau^{ii}$ je hustota tepelné energie.

Všimněme si, že zatím co veličiny n , ρ , π a T jsou lineární funkcionály rozdělovací funkce f , veličiny v a τ častěji užívané v hydrodynamickém popisu (místo π a T) jsou nelineární.

Pohyb každé částice lze popsat trajektoriemi $x = x(t)$, $p = p(t)$ ve fázovém prostoru (viz např. obr. 1.1.a). Jestliže částice nemohou s časem vznikat ani zanikat a jestliže platí tzv. Liouvilleův teorém⁶

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0, \quad (1.33)$$

tj. fázový objem je invariantem pohybu, pak je také f invariantem pohybu a platí pro něj bezesrážková Boltzmannova rovnice

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0. \quad (1.34)$$

Speciálním, ale přitom dosti obecným, případem kdy platí Liouvilleův teorém (1.33) je případ hamiltonovského pohybu popsaného kanonickými pohybovými rovnicemi

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad (1.35)$$

Pak totiž

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x^i} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial p_i} \right) = 0. \quad (1.36)$$

Boltzmannovu rovnici (1.34) lze v tom případě zapsat také pomocí Poissonových závorek

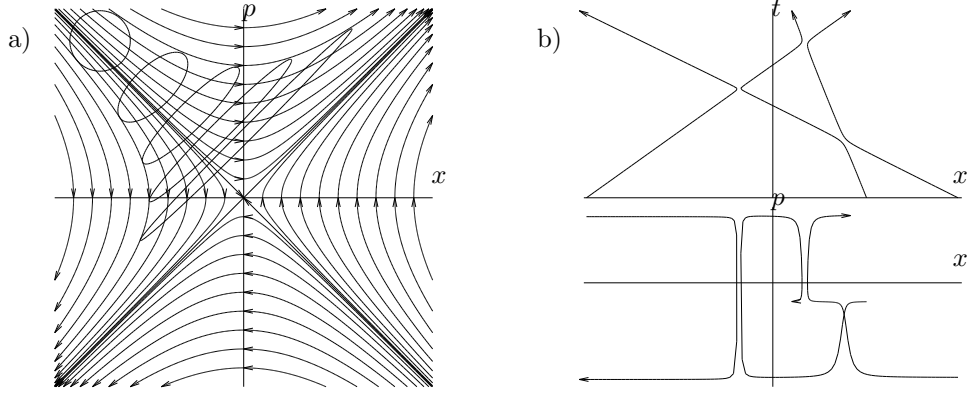
$$\frac{\partial f}{\partial t} - [H, f] = 0. \quad (1.37)$$

Pohyb každé částice je obecně určen jednak působením vnějších polí ale i vzájemnou interakcí s ostatními částicemi plynu. Hamiltonián každé částice je tedy závislý i na stavech ostatních částic a pohybové rovnice (1.35) všech N částic jsou vzájemně svázané. V tom případě je invariantní pouze fázový objem $d^{6N} \Gamma$ v prostoru stavů celého systému N částic a místo rovnice (1.37) platí pouze rovnice

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} - [H_N, f_N] = 0, \quad (1.38)$$

pro N -částicovou rozdělovací funkci $f_N = f_N(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N, t)$ reprezentující pravděpodobnost výskytu celého systému v daném stavu, resp. počet systémů z nějakého velkého souboru

⁶ Při jednoparametrické grupě transformací $\xi = \xi(t, \xi_0)$ v N -dim prostoru se totiž objem $\Gamma = \int d^N \xi = \int \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0$ mění $\dot{\Gamma} = \int \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0 = \int \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{\partial \xi(t+\Delta t)}{\partial \xi(t)} \right| - 1}{\Delta t} \left| \frac{\partial \xi(t)}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0 = \int \sum_{i=1}^N \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^i} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{\xi}^i}{\partial \xi^i} \Gamma$ (speciálním případem je časová změna $\frac{d}{dt} V = V \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$ objemu V elementu tekutiny v rychlostním poli v^i .)



Obrázek 1.1: Fázové trajektorie. Jednorozměrný pohyb a) neinteragujících částic ve vnějším poli potenciálové bariéry $\Phi(x) = -x^2$, b) volných částic interagujících $\Phi_{\text{int.}}(x_A - x_B) = (x_A - x_B)^{-2}$.

systémů, které jsou v daném stavu. Pro K částic ($K = 1, \dots, N - 1$) můžeme zavést K -částicovou rozdělovací funkci

$$f_K(x_1, \dots, x_K, p_1, \dots, p_K, t) = \int f_N(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N, t) \prod_{i=K+1}^N d^3 x_i d^3 p_i, \quad (1.39)$$

vyjadřující pravděpodobnost jejich výskytu v jistém stavu z $6K$ -dimenzionálního podprostoru prostoru stavů všech částic bez ohledu na stav zbývajících $N - K$ částic (předpokládáme implicitně, že všechny částice jsou stejného druhu a záměna stavů každé dvojice je nerozlišitelná).

Hamiltonián H_N můžeme zpravidla považovat za součet jednočásticových hamiltoniánů H_1 jednotlivých částic pohybujících se nezávisle ve vnějších a kolektivních polích a dvoučásticových (popřípadě několika málo více částicových) interakčních hamiltoniánů Φ , vyjadřujících vzájemnou interakci pro každou dvojici částic

$$H_N(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N H_1(x_i, p_i) + \sum_{i < j} \Phi(x_i, x_j, p_i, p_j). \quad (1.40)$$

Vyintegrováním rovnice (1.38) přes stavy částic $i = K + 1, \dots, N$ (analogicky definici (1.39)) dostaneme pohybovou rovnici pro f_K . Integrací per partes

$$\begin{aligned} \int [H_1, f_N] dx_i dp_i &= \int \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_N}{\partial p_i} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_N}{\partial x_i} \right) dx_i dp_i \\ &= \int \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_i} f_N \right]_{p_i=-\infty}^{+\infty} dx_i - \int \left[\frac{\partial H_1}{\partial p_i} f_N \right]_{x_i=-\infty}^{+\infty} dp_i = 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

se lze přesvědčit, že příspěvky jednočásticových hamiltoniánů $H_1(x_i, p_i)$ pro $i > K$ jsou nulové. Analogicky se vyruší i příspěvky interakčních hamiltoniánů $\Phi_{i,j}$ pro $K < i < j$. Všechny interakční členy s pro $i \leq K < j$ jsou dohromady $N - K$ násobkem členu s $j = K + 1$ a zbylé členy jednočásticové i interakční s $i, j \leq K$ dávají analogicky (1.40) hamiltonián H_K soustavy K částic. Pohybová rovnice pro f_K má tedy tvar

$$\frac{\partial f_K}{\partial t} - [H_K, f_K] = (N - K) \sum_{i=1}^K \int [\Phi_{i,K+1}, f_{K+1}] d^3 x_{K+1} d^3 p_{K+1}. \quad (1.42)$$

Tyto rovnice pro různá K tvoří tzv. hierarchii BBGKY.⁷ První rovnice z této soustavy

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - [H_1, f_1] = (N-1) \int [\Phi_{1,2}, f_2] d^3x_2 d^3p_2 \quad (1.43)$$

je analogicky (1.37) jednočásticová Boltzmannova rovnice na jejíž pravé straně však stojí příspěvek dvojčásticové rozdělovací funkce. Pro tu platí rovnice

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - [H_2, f_2] = (N-2) \sum_{i=1}^2 \int [\Phi_{i,3}, f_3] d^3x_3 d^3p_3, \quad (1.44)$$

atd. Pravou stranu rovnice (1.43) lze chápat rovněž jako změnu jednočásticové rozdělovací funkce v důsledku vzniku nebo zániku částice v daném stavu v důsledku její interakce (srážky) s ostatními částicemi. Mezi srážkami se každá částice pohybuje nezávisle na ostatních (viz obr.1.1.b – nahoře) podle rovnic (1.35), kde hamiltonián je již závislý pouze na souřadnicích dané částice (vnější a kolektivní pole vstupují do hamiltoniánu pouze jako parametry) a tedy jednočásticový fázový objem se zachovává. Srážka, jejíž pravděpodobnost je dána jednočásticovou rozdělovací funkcí druhé interagující částice (pokud jsou stavy různých částic nezávislé, nebo dvojčásticovou rozdělovací funkcí, pokud jsou jejich stavy korelované), se projeví jako přechod sledované částice na jinou fázovou trajektorii (viz obr. 1.1.b – dole), tj. jako zánik částice na její původní trajektorii a vznik na nové trajektorii (popřípadě pouze zánik nebo pouze vznik, jestliže jde o nepružnou srážku či chemickou reakci, při které se změní typ vstupujících částic). Působení srážek je zahrnuto do Boltzmannovy rovnice pomocí tzv. srážkového členu na pravé straně, která vyjadřuje pravděpodobnost vzniku částice (se záporným znaménkem též zániku),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c. \quad (1.45)$$

1.1.4 Momentové rovnice a hydrodynamická aproximace

Vypočteme-li momenty Boltzmannovy rovnice (1.45) v prostoru hybností, dostaneme parciální diferenciální rovnice pro momenty definované rovnicemi (1.29) až (1.31). Odvodme si tyto rovnice pro jednoduchý případ částic ve skalárním potenciálovém poli, kdy hamiltonián

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\Phi(x), \quad (1.46)$$

podle (1.35) tedy

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p_i}{m}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -m \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad (1.47)$$

takže (1.45) má konkrétně tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} - m \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c. \quad (1.48)$$

Nultý moment (tj. $\int d^3p$) této rovnice dává

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \pi^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta n}{\delta t} \right)_c, \quad (1.49)$$

⁷Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon – podrobněji viz [7].

kde na pravé straně je moment srážkového členu definovaný analogicky (1.29), který udává číselnou hustotu částic vzniklých srážkami za jednotku času (což musí být nula, pokud nedochází k chemickým reakcím). Integrál třetího členu na levé straně rovnice (1.48) je nulový, protože je to integrál derivace rozdělovací funkce f , která musí jít pro nekonečné p k nule, aby dávala konečnou hustotu. Přepíšeme-li tuto rovnici pomocí rychlosti v^i zavedené v (1.30), dostaneme známou rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} \right)_c . \quad (1.50)$$

První momenty rovnice (1.48) dostaneme vynásobením p^j a vyintegrováním (tj. $\int d^3 p p^j$)

$$\frac{\partial \pi^j}{\partial t} + \frac{\partial T^{ji}}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left(\frac{\delta \pi^j}{\delta t} \right)_c . \quad (1.51)$$

Třetí člen na levé straně jsme upravili integrací per partes $\int p^j \frac{\partial f}{\partial p_i} = -\delta_i^j \int f$, na pravé straně je opět hustota hybnosti předaná srážkami za jednotku času (která musí být nulová, jestliže dochází pouze ke srážkám mezi částicemi téhož druhu). Kombinací s rovnicí kontinuity (1.50) odtud můžeme dostat pohybovou rovnici pro jednosložkový plyn ve tvaru obvyklejším v hydrodynamice

$$\rho \left(\frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial \tau^{ji}}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left(\frac{\delta \pi^j}{\delta t} \right)_c - v^j \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} \right)_c . \quad (1.52)$$

Podobně pro druhé momenty rovnice (1.48) dostaneme (vyintegrováním $\int d^3 p p^j p^k / m$) rovnici pro složky tenzoru napětí

$$\frac{\partial T^{jk}}{\partial t} + \frac{\partial Q^{ijk}}{\partial x^i} + \pi_j \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \pi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left(\frac{\delta T^{jk}}{\delta t} \right)_c , \quad (1.53)$$

kde na pravé straně je opět příspěvek srážkového členu ke změně tenzoru napětí. Tato rovnice obsahuje divergenci momentu vyššího řádu, a to toku složek tenzoru napětí (resp. energie, která je úměrná jeho stopě)

$$Q^{ijk} \equiv m^{-2} \langle p_i p_j p_k f \rangle . \quad (1.54)$$

Jestliže tenzor Q^{ijk} přepíšeme (analogicky (1.31)) pomocí transformace do vlastní klidové soustavy plynu (v níž by měl hodnotu q^{ijk})

$$Q^{ijk} = q^{ijk} + v^i \tau^{jk} + v^k \tau^{ij} + v^j \tau^{ki} + v^i v^j v^k \rho , \quad (1.55)$$

pak rovnici (1.53) můžeme užitím nižších momentových rovnic přepsat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^{jk}}{\partial t} + \frac{\partial q^{ijk}}{\partial x^i} + \frac{\partial (v^i \tau^{jk})}{\partial x^i} + \tau^{ki} \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \tau^{ji} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} = \\ = \left(\frac{\delta T^{jk}}{\delta t} \right)_c + v^j v^k \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} \right)_c - v^j \left(\frac{\delta \pi^k}{\delta t} \right)_c - v^k \left(\frac{\delta \pi^j}{\delta t} \right)_c . \end{aligned} \quad (1.56)$$

Momentové rovnice (1.49), (1.51), (1.53) a další lze zapsat jednotně zavedením momentů

$$M^\alpha = \langle p^\alpha f \rangle = \int p^\alpha f d^3 p \quad (1.57)$$

zobecnujících definice (1.29), (1.30), (1.31), (1.54) a další, kde α je tzv. multi-index⁸, jehož norma udává stupeň (řád) momentu. Obecný moment rovnice (1.48) má potom tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} M^\alpha + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x^i} M^{\alpha+i} + m \alpha^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} M^{\alpha-i} = \left(\frac{\delta M^\alpha}{\delta t} \right)_c, \quad (1.58)$$

kde na pravé straně je příslušný moment srážkového členu. Vidíme tedy, že každá momentová rovnice vždy obsahuje i momenty vyššího řádu, takže tyto rovnice tvoří nekonečnou soustavu parciálních diferenciálních rovnic (ovšem v prostoru s nižší dimenzí než původní Boltzmannova rovnice, protože závislost rozdělovací funkce na hybnosti vlastně reprezentujeme spočetnou posloupností momentů, z nichž lze tuto funkci v principu zpětně rekonstruovat).

Aby soustava momentových rovnic byla uzavřená, musíme některé z vyšších momentů apriorně vyjádřit pomocí nižších momentů. Můžeme například učinit nejjednodušší předpoklad, že f bude dáno rovnovážným maxwellovským rozdělením (srovnej rov. (1.140))

$$f = n(2\pi mkT)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mkT}\right), \quad (1.59)$$

kde výška a střed gausovské křivky jsou v soulase s (1.29) a (1.30) dány ρ a v , které musí splňovat pohybové rovnice (1.50) a (1.52). Podle (1.31) je pro rozdělení (1.59) tenzor napětí ve vlastní soustavě izotropní, úměrný teplotě rozdělení T ,

$$\tau^{ij} = \delta^{ij} P = \delta^{ij} nkT = \delta^{ij} \frac{2\varepsilon}{3}, \quad (1.60)$$

kde P je tlak a ε je hustota tepelné energie. Teplota může být předem zadaná (např. určená rovnováhou se zářením), nebo pro ni (resp. pro ε) ze stopy rovnice (1.56), kde tok tepla $q = 0$ v důsledku předpokladu (1.59), dostáváme rovnici energetické rovnováhy

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \varepsilon + \frac{5}{3} \varepsilon \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta \varepsilon}{\delta t} \right)_c. \quad (1.61)$$

Druhý člen na levé straně této rovnice udává změnu vnitřní energie v důsledku práce vykonané stlačováním plynu proti jeho tlaku. Srážkový člen na pravé straně by byl nulový pro adiabatický pohyb jednosložkového plynu, nebo může vyjadřovat příspěvek výměny energie s ostatními složkami nebo zářením — tento člen by v případě zářivé rovnováhy musel dominovat. Podobně i ostatní složky rovnice (1.56) mají význam kritéria oprávněnosti předpokladu (1.59) — srážkové členy na pravé straně musí být dostatečně dominantní aby zajistily relaxaci odchylek od rovnovážného rozdělení způsobovaných gradienty na levé straně.

⁸Multi-index α je vektorový index (vektor s celočíselnými složkami), pomocí kterého můžeme definovat mocninu p^α vektoru p

$$p^\alpha = \prod_{i=1}^3 (p^i)^{\alpha^i}.$$

Jeho norma je definovaná vztahem

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha^i.$$

Index $i|_{i=1}^3$ můžeme chápat současně jako jednotkový multi-index ve směru i , takže např.

$$p^i p^\alpha = p^{\alpha+i}.$$

Jestliže srážky nejsou dostatečně účinné aby zajistily platnost přiblížení (1.59), musíme do Boltzmannovy rovnice resp. jejích momentů pravou stranu dosadit a počítat odchylky skutečné rozdělovací funkce od (1.59). Skutečným tvarem srážkového členu se budeme zabývat v kapitole 1.2. Pro ilustraci jeho vlivu na řešení Boltzmannovy rovnice však můžeme vystačit se zjednodušeným ‘BGK’- modelem (Bhatnagar, Gross, Krook [1], [14])

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = -\frac{f - f_0}{\Delta t}, \quad (1.62)$$

kde Δt je nějaký relaxační čas⁹ a f_0 je rovnovážná rozdělovací funkce daná (v nerelativistickém případě) vztahem (1.59). Obecný moment tohoto srážkového členu má tvar

$$\left(\frac{\delta M^\alpha}{\delta t}\right)_c = -\frac{M^\alpha - M_0^\alpha}{\Delta t}, \quad (1.63)$$

takže např. v případě jednosložkového plynu je jeho příspěvek k hustotě a hybnosti (popřípadě i hustotě energie) nulový, protože f_0 jsme volili tak, aby dávalo stejné hodnoty těchto momentů jako f . Vyšší momenty, jako např. složky tenzoru napětí (resp. pouze jeho odchylky od izotropního tlaku) nebo tenzoru Q , pak můžeme odhadnout pomocí rozvoje podle malého parametru Δt z dosazení (1.63) do (1.58)

$$M^\alpha = M_0^\alpha - \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} M_0^\alpha + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x^i} M_0^{\alpha+i} + m \alpha^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} M_0^{\alpha-i} \right) + o(\Delta t^2), \quad (1.64)$$

a po jejich dosazení do příslušných nižších momentových rovnic dostaneme difúzní aproximaci, přičemž Δt určuje příslušné difúzní koeficienty (viskozitu, tepelnou vodivost aj.).

Všechny momenty M_0^α přitom můžeme explicitně vypočítat dosazením (1.59) do (1.57). Je zřejmé, že ve vlastní soustavě plynu (ve které $v = 0$) budou všechny momenty M_0^α , pro které je alespoň jedna složka α^i lichá, rovny nule, ale nekonečný počet sudých momentů bude nenulový. V obecné (nikoliv vlastní) soustavě pak bude podle binomické formule každý moment lineární kombinací stejného a nižších momentů klidových. Pro praktické výpočty proto může být výhodné¹⁰ přejít od reprezentace f v p -prostoru nikoliv k mocninným momentům (1.57), ale k rozvoji f do vhodné soustavy funkcí (‘ket-vektorů’) $|\alpha\rangle$

$$|f\rangle = f^\alpha |\alpha\rangle. \quad (1.65)$$

Koeficienty rozvoje f^α jsou potom zobecněné momenty, které dostaneme vynásobením f s duálními ‘bra-vektory’ $f^\alpha = \langle \alpha | f \rangle$ (kde $\langle \alpha | \beta \rangle = \delta^{\alpha\beta}$) a konkrétní tvar momentových rovnic analogických (1.58) pro ně dostaneme dosazením vyjádření operátorů \hat{p} a $\frac{\hat{\partial}}{\partial p}$ v $|\alpha\rangle$ -reprezentaci do Boltzmannovy rovnice (1.45) s konkrétním vyjádřením složek Liouvilleova operátoru $\frac{d}{dt}$ jako funkcí p . Například, jestliže lze očekávat, že odchylky od rovnovážného rozdělení (1.59) částic budou malé, pak je výhodné užít tzv. Gradovy metody (viz např. [7]), ve které je reprezentace $|\alpha\rangle$ tvořena Hermiteovými polynomy vynásobenými gaussovskou váhou (1.59) vůči níž jsou ortonormální, takže $\langle \alpha |$ jsou samotné hermiteovské polynomy. Hermiteovské momenty jsou lineárními kombinacemi fyzikálně významných momentů (1.57) a kromě nultého jsou nulové pro (lokálně) rovnovážné rozdělení se správnou rychlostí a teplotou. Proto zpravidla stačí uvažovat prvních 20 momentů (tj. do třetího stupně) nebo 13 momentů (do druhého stupně a toky energie $\sim Q^{ij}$).

⁹Nepřesnost BGK-aproximace spočívá především v předpokladu že k této relaxaci dochází v celém rychlostním prostoru stejnou rychlostí.

¹⁰Přechod k nové reprezentaci je výhodný tehdy, jestliže tato reprezentace vystihuje (předpokládanou) symetrii řešení konkrétní úlohy, takže stačí nezanedbat menší počet zobecněných momentů. Ze stejných důvodů může být výhodné přejít k diskrétní reprezentaci i ve smíšeném x - a p - řezu fázovým prostorem.

1.1.5 Magneto hydrodynamika

Předpokládejme, že plazma se skládá ze dvou druhů částic s kladným a záporným nábojem q_{\pm} a hmotami m_{\pm} . Každý z těchto druhů částic je popsán rozdělovací funkcí f_{\pm} , která splňuje Boltzmannovu rovnici

$$\partial_t f_{\pm} + \dot{x}^i \partial_{x^i} f_{\pm} + \dot{p}^i \partial_{p^i} f_{\pm} = \left(\frac{\delta}{\delta t} f_{\pm} \right), \quad (1.66)$$

kde rychlost každé částice (srovnej s (1.47))

$$\dot{x}^i = \frac{p^i}{m_{\pm}}, \quad (1.67)$$

a zrychlení je nyní působeno nejen gravitační, ale i elektrostatickou a Lorentzovou silou

$$\dot{p}^i = -m_{\pm} \nabla^i \Phi + q_{\pm} E^i + \frac{q_{\pm}}{cm_{\pm}} \varepsilon^{ijk} p^j B^k. \quad (1.68)$$

Nulté momenty rovnic (1.66) mají tvar¹¹

$$\partial_t \rho_{\pm} + \nabla_i (\pi_{\pm}^i) = \left(\frac{\delta \rho_{\pm}}{\delta t} \right), \quad (1.69)$$

a první momenty

$$\partial_t \pi_{\pm}^i + \nabla_j T_{\pm}^{ij} + \rho_{\pm} \nabla^i \Phi - \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} \rho_{\pm} E^i - \frac{q_{\pm}}{cm_{\pm}} \varepsilon^{ijk} \pi_{\pm}^j B^k = \left(\frac{\delta \pi_{\pm}^i}{\delta t} \right). \quad (1.70)$$

Rovnice (1.53) pro druhé momenty zobecněná pro nabitě částice má tvar

$$\partial_t T_{\pm}^{jk} + \nabla_i Q_{\pm}^{ijk} + \pi_{\pm}^j \nabla^k \Phi + \pi_{\pm}^k \nabla^j \Phi - \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} (\pi_{\pm}^j E^k + \pi_{\pm}^k E^j) - \frac{q_{\pm} B^i}{cm_{\pm}} (\varepsilon^{ijl} T_{\pm}^{lk} + \varepsilon^{ikl} T_{\pm}^{jl}) = \left(\frac{\delta T_{\pm}^{jk}}{\delta t} \right). \quad (1.71)$$

Zavedeme-li celkovou hustotu hmoty $\rho = \rho_+ + \rho_-$ a celkovou rychlost $v = (\pi_+ + \pi_-)/\rho$, pak sečtením rovnic (1.69) pro oba druhy částic dostaneme rovnici kontinuity hmoty

$$\partial_t \rho + \nabla_i (\rho v^i) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \rho \right) = 0, \quad (1.72)$$

kde jsme zároveň předpokládali, že v procesech srážek částice žádného druhu nevznikají ani nezanikají a pravé strany rovnic (1.69) proto musí být nulové.¹² Rovnici kontinuity můžeme upravit také do tvaru

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla_i v^i = 0. \quad (1.73)$$

Podobně, zavedeme-li celkovou hustotu náboje $\eta = \frac{q_+}{m_+} \rho_+ + \frac{q_-}{m_-} \rho_-$ a proud $J = (\frac{q_+}{m_+} \pi_+ + \frac{q_-}{m_-} \pi_-)$, pak váhovaným součtem rovnic (1.69) dostaneme rovnici kontinuity náboje

$$\partial_t \eta + \nabla_i (J^i) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \eta \right) = 0. \quad (1.74)$$

¹¹Nebot $\int_p \varepsilon^{ijk} p^j \partial_{p^i} f_{\pm} = - \int_p \varepsilon^{ijk} \delta_i^j f_{\pm} = 0$.

¹²V reálném plazmatu může docházet k rekombinaci a ionizaci. Pak je zapotřebí přidat ještě alespoň rovnici pro neutrální částice a nulový bude pouze součet pravých stran.

Sečtením rovnic (1.70) dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\partial_t(\rho v^i) + \nabla_j T^{ij} + \rho \nabla^i \Phi - \eta E^i - \frac{1}{c} \varepsilon^{ijk} J^j B^k = \left(\frac{\delta}{\delta t} \pi^i \right) = 0, \quad (1.75)$$

kde vzhledem k zachování hybnosti při srážkách musí součet srážkových členů vymizet. Celkový tenzor napětí můžeme rozložit na část příslušející uspořádanému pohybu $\rho v^i v^j$ a část tlakovou¹³ P^{ij} , tj. $T^{ij} \equiv T_+^{ij} + T_-^{ij} = \rho v^i v^j + P^{ij}$. Předpokládáme-li tlak izotropní (což je ovšem při existenci proudu, tj. nenulových prvních momentů rozdělovacích funkcí, těžko přesně splnitelné) a předpokládáme nulový celkový náboj η , pak po úpravě $\partial_t(\rho v^i) = \rho \frac{d}{dt} v^i - \nabla_j(\rho v^i v^j)$ využívající rovnice kontinuity (1.72) dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho \frac{d}{dt} v = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{c} J \times B. \quad (1.76)$$

Váhováním součtem rovnic (1.70) dostaneme pohybovou rovnici pro proud

$$\partial_t J^i + \sum_{\pm} \nabla_j \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} T_{\pm}^{ij} + \eta \nabla^i \Phi - \sum_{\pm} \frac{q_{\pm}^2}{m_{\pm}^2} \rho_{\pm} E^i - \sum_{\pm} \frac{q_{\pm}^2}{cm_{\pm}^2} \varepsilon^{ijk} \pi_{\pm}^j B^k = \left(\frac{\delta}{\delta t} J^i \right). \quad (1.77)$$

Srážkový člen na pravé straně je zde obecně nenulový, protože obě složky si ve srážkách vyměňují hybnost a tím disipuje proud. Jestliže předpokládáme charakteristický relaxační čas pro ustavení rovnováhy (tj. pro vymizení proudu po vypnutí síly, která jej způsobuje) Δt , pak v BGK aproximaci ($(\frac{\delta}{\delta t} J) = -\frac{J}{\Delta t}$) má tato rovnice tvar

$$J^i = \Delta t \left(-\sum_{\pm} \nabla_j \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} T_{\pm}^{ij} - \eta \nabla^i \Phi + \sum_{\pm} \frac{q_{\pm}^2}{m_{\pm}^2} \rho_{\pm} E^i + \sum_{\pm} \frac{q_{\pm}^2}{cm_{\pm}^2} \varepsilon^{ijk} \pi_{\pm}^j B^k \right), \quad (1.78)$$

tj. po rozepsání hybností obou složek jako lineárních kombinací v a J

$$J^i = \alpha^i + \varepsilon^{ijk} J^j \beta^k, \quad (1.79)$$

kde

$$\alpha^i = \Delta t \left(-\nabla_j \eta v^i v^j - \nabla_j \left(\frac{q_+}{m_+} P_+^{ij} + \frac{q_-}{m_-} P_-^{ij} \right) - \eta \nabla^i \Phi - \frac{q_+ q_-}{m_+ m_-} \rho E^i + \left(\frac{q_+}{m_+} + \frac{q_-}{m_-} \right) \eta E^i - \frac{q_+ q_-}{cm_+ m_-} \varepsilon^{ijk} \rho v^j B^k \right), \quad (1.80)$$

a

$$\beta^k = \frac{\Delta t}{c} \left(\frac{q_+}{m_+} + \frac{q_-}{m_-} \right) B^k. \quad (1.81)$$

Řešení rovnice (1.79) má tvar¹⁴

$$J^i = \frac{1}{1 + \beta^2} (\alpha^i + \beta^i \beta_j \alpha^j + \varepsilon^{ijk} \alpha^j \beta^k). \quad (1.82)$$

¹³Tj. napětí vzhledem k vlastnímu klidovému systému plazmatu. Tlak je součtem parciálních tlaků obou druhů částic.

¹⁴Opakovaným zpětným dosazením totiž $J = \alpha + J \times \beta = \alpha + \alpha \times \beta + (J\beta)\beta - (\beta\beta)J = \alpha + \alpha \times \beta + (\alpha\beta)\beta - (\beta\beta)J$.

Jestliže zanedbáme členy od druhého řádu v Δt (což znamená všechny členy s β), v rovnici (1.80) předpokládáme nulovou hustotu náboje a zanedbáme gradienty parciálních tlaků obou složek, pak se tato rovnice redukuje na Ohmův zákon

$$J = \sigma(E + \frac{v}{c} \times B) . \quad (1.83)$$

kde vodivost

$$\sigma = \frac{q_+q_-}{m_+m_-} \rho \Delta t . \quad (1.84)$$

Rovnice (1.76) a (1.83) popisují vliv elektromagnetického pole na pohyb plazmatu. Naproti tomu Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times B - \frac{1}{c} \partial_t E = \frac{4\pi}{c} J , \quad (1.85)$$

$$\nabla E = 4\pi\eta \simeq 0 , \quad (1.86)$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c} \partial_t B = 0 , \quad (1.87)$$

a

$$\nabla B = 0 , \quad (1.88)$$

popisují vliv zdrojů na pole. V rovnici (1.86) jsme opět zanedbali hustotu náboje. Jestliže v rovnici (1.85) zanedbáme polarizaci vakua proti el. proudu J , pak se zjednoduší na

$$\partial_t E \simeq 0 \Rightarrow J = \frac{c}{4\pi} \nabla \times B . \quad (1.89)$$

Dosadíme-li odsud proud do rovnice (1.76), dostaneme pohybovou rovnici pro plazma v zadaném magnetickém poli¹⁵

$$\rho \frac{d}{dt} v = -\nabla P - \rho \nabla \Phi - \frac{1}{8\pi} \nabla (B \cdot B) + \frac{1}{4\pi} (B \cdot \nabla) B . \quad (1.90)$$

Naproti tomu vývoj magnetického pole je dán rovnicí (1.87), kde můžeme z Ohmova zákona (1.83) vyloučit E a z (1.89) opět i J , takže dostaneme pohybovou rovnici pro B

$$\partial_t B = -c \nabla \times E = \nabla \times \left(-\frac{c}{\sigma} J + v \times B \right) = -\nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times B \right) + \nabla \times (v \times B) . \quad (1.91)$$

Můžeme ji dále přepsat do lagrangeovských souřadnic

$$\frac{d}{dt} B = \partial_t B + (v \cdot \nabla) B = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 B + (B \cdot \nabla) v - B(\nabla \cdot v) . \quad (1.92)$$

První člen na pravé straně popisuje difúzi magnetického pole, zatímco druhé dva členy jeho zamrznutí do plazmatu. Difúzní člen dominuje v případě malé vodivosti σ , malých gradientů rychlosti ∇v a naopak velkých nehomogenit magnetického pole $\nabla^2 B$, jejichž relaxaci způsobuje. V opačném případě vysoké vodivosti $\sigma \rightarrow \infty$ můžeme tento člen zanedbat a z kombinace s rovnicí kontinuity (1.73) odvodit vztah

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{B}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (B \cdot \nabla) v \quad (1.93)$$

¹⁵Přitom jsme užili relace

$$((a \times b) \times c)_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} a_l b_m c_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{il} \delta_{km}) a_l b_m c_k = (ac) b_i - (bc) a_i .$$

pro vývoj magnetického pole. Jestliže vyjádříme souřadnice magnetických siločar procházejících zvoleným elementem plazmatu v parametrickém tvaru $x^i = x^i(t, s, \xi_{1,2})$ tak, že vektor

$$b^i \equiv \frac{B^i}{\rho} = \frac{\partial x^i}{\partial s} \quad (1.94)$$

je tečný k siločáře a rychlost plazmatu

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} \quad (1.95)$$

(souřadnice $\xi_{1,2}$ se pohybují s plazmatem a parametrizují volbu siločáry), pak v soulase s rov. (1.93)

$$\frac{db^i}{dt} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} = \frac{\partial v^i}{\partial s} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial s} = b^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} . \quad (1.96)$$

1.2 Srážkový člen

1.2.1 Binární srážky

Metodou řetězce BBGKY jsme našli srážkový člen Boltzmannovy rovnice (1.43) ve tvaru

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = (N-1) \int [\Phi_{1,2}, f_2] d^3x_2 d^3p_2. \quad (1.97)$$

Předpokládejme, že binární interakční potenciál $\Phi_{1,2} = \Phi(|r|)$, kde $r = x_2 - x_1$ je vzájemná vzdálenost částic, a že $\Phi(|r|) = 0$ pro $r > R$, tj. vně jistého malého poloměru interakce. Vně tohoto poloměru můžeme očekávat náhodné, vzájemně nekorelované rozdělení částic,

$$f_2(x_1, p_1, x_2, p_2) = f_1(x_1, p_1) f_1(x_2, p_2). \quad (1.98)$$

Naproti tomu pro menší vzdálenosti může Φ divergovat, a potom f_2 musí klesat k nule, což odpovídá skutečnosti, že částice se k sobě nemohou v důsledku své interakce neomezeně přiblížit. Abychom mohli podle (1.97) vyčíslit srážkový člen, musíme nalézt (anti-)korelaci částic v malých vzdálenostech. Předpokládejme, že dvojčásticová rozdělovací funkce je časově nezávislá, prostorově závislá pouze na r , a že její ovlivnění vnějšími poli vystupujícími v Hamiltoniánu (např. gravitačním, elektromagnetickým) i ovlivnění dalšími částicemi je (alespoň během binární srážky) zanedbatelné. Dostáváme tak pro ni další rovnici (1.44) v explicitním tvaru

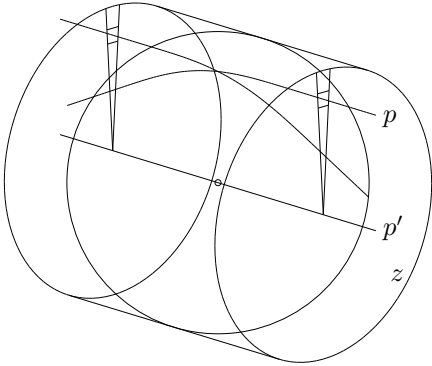
$$[H_2, f_2] \equiv \left[\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \Phi(r), f_2 \right] = [\Phi(r), f_2] + \frac{p_1^i - p_2^i}{m} \frac{\partial f_2}{\partial r^i} = 0. \quad (1.99)$$

Odtud můžeme vyjádřit $[\Phi(r), f_2]$ a po dosazení do (1.97) dostáváme

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = (N-1) \int \frac{p_2^i - p_1^i}{m} \int \frac{\partial f_2}{\partial r^i} d^3r d^3p_2. \quad (1.100)$$

Vnitřní integrál gradientu dvojčásticové rozdělovací funkce přechází na integrál této funkce přes plochu kolmou ke směru $p_2^i - p_1^i$, tj. ve válcových souřadnicích b, φ, z (b je srážkový parametr)

$$\int \frac{\partial f_2}{\partial r^i} d^3r = \int [f_2]_{z=-Z}^{z=+Z} b db d\varphi, \quad (1.101)$$



Obrázek 1.2: Geometrie binární srážky.

kde $Z \geq R$ je poloviční výška válce obsahující sféru binární interakce (přitom však stále podstatně menší než jsou prostorové nehomogenity vyjádřené závislostí $f_1(x)$). V $z = -Z$ je podle předpokladu (1.98) dvojčásticová rozdělovací funkce vyjadřující hustotu vzájemně proti sobě nalétávajících částic dána součinem lokálních (na prostorové škále $b \leq R$ homogenních) jednočásticových funkcí. Naproti tomu v $z = +Z$ je hustota vylétávajících částic $f_2(b)$ obecně nehomogenní. Protože proces srážky dvou částic vyšetřujeme jako pohyb (neovlivněný interakcí s dalšími částicemi) ve dvoučásticovém fázovém prostoru, f_2 je konstantní podél příslušné fázové trajektorie, takže

$$f_2(b, z = +Z, p_2 - p_1) = f_2(r > R, p'_2 - p'_1) = f_1(p'_1)f_1(p'_2), \quad (1.102)$$

kde $p'_{1,2}$ jsou hybnosti které musí mít nalétávající částice aby se po srážce dostaly do směrů $p_{1,2}$ a srážkového parametru b (vzhledem k časové reverzibilitě¹⁶ tak jde o vyšetřování diferenciálního účinného průřezu $d\sigma = 2\pi b db$ rozptylu $-p_{1,2} \rightarrow -p'_{1,2}$). Po dosazení do (1.100) tak dostáváme srážkový člen ve tvaru

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = (N-1) \int \frac{p'_2 - p'_1}{m} \int (f_1(p'_1)f_1(p'_2) - f_1(p_1)f_1(p_2)) 2\pi b db d^3 p_2. \quad (1.103)$$

Tento výraz obsahuje relativní rychlost $\frac{p_2 - p_1}{m}$ částic vynásobenou diferenciálním účinným průřezem, čili, v soulase s představou znázorněnou v obr. 1.1–b, pravděpodobnost procesu srážek, při nichž částice odejdou z fázového elementu určeného $p_{1,2}$ do $p'_{1,2}$ nebo naopak. Tento výsledek může být zobecněn i pro kvantové procesy a různé počty interagujících částic (např. pro rozpady částic na částice jiných druhů), kdy mechanická analogie dvojčásticové srážky je neplatná.

1.2.2 Obecný tvar

Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (1.45) pro jednočásticovou rozdělovací funkci částic typu A udává celkovou fázovou hustotu pravděpodobnosti vzniku (nebo negativní hodnota zániku) těchto částic interakcí s ostatními částicemi téhož nebo jiného druhu. Proto jej můžeme vyjádřit jako součet kladných příspěvků od jednotlivých elementárních procesů, při nichž dochází ke vzniku takovéto částice ve sledovaném elementu fázového prostoru, a záporných příspěvků od procesů, při nichž částice zaniká. To znamená, že například rozptyl, což je přechod částice z jednoho bodu v prostoru hybností do druhého, chápeme jako zánik částice v původním a vznik v novém elementu fázového prostoru. Uvažujme tedy obecnou ('chemickou') reakci mezi částicemi $X_B|_{B=1}^M$, při níž vznikají částice $X_B|_{B=M+1}^N$

$$\sum_{B=1}^M X_B \rightleftharpoons \sum_{B=M+1}^N X_B. \quad (1.104)$$

Pokud všechna X_B můžeme považovat za nekvantové částice (tj. jestliže můžeme zanedbat stimulovanou emisi pro bosony a vylučovací princip pro fermiony, což lze vždy, když jsou rozdělovací funkce zanedbatelné vůči fázové hustotě ϕ_B elementárních kvantových stavů), pak příspěvek reakce (1.104) ke srážkovému členu částice X_A bude

$$\left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c(p_A) = \sum_{C, X_C \equiv X_A} \nu_C \int \left[P(p_1, \dots, p_N) \prod_{B=1}^M f_B(p_B) \right]_{p_C=p_A} \prod_{B=1, B \neq C}^N d^3 p_B, \quad (1.105)$$

¹⁶Bezsrážková Boltzmannova rovnice pro N -částicovou rozdělovací funkci je časově reverzibilní. Binární interakce původně nekorelovaných nalétávajících částic způsobuje korelaci mezi vylétávajícími částicemi, kterou by bylo třeba si 'zapamatovat', aby byl celý systém stále vratný. Přiblížením dvojčásticové rozdělovací funkce vylétávajících částic opět nekorelovaným rozdělením v jiném elementu dvojčásticového fázového prostoru předpokládáme, že srážková korelace je vlivem dalšího vývoje 'zapomenuta' a proto takto odvozená jednočásticová Boltzmannova rovnice s pravou stranou se stává časově ireverzibilní.

kde ‘stechiometrické koeficienty’ $\nu_C = +1$ pro částice vznikající ($C > M$) a $\nu_C = -1$ pro částice zanikající ($C \leq M$). $P(p_1, \dots, p_N)$ je pravděpodobnost proběhnutí reakce (1.104) za jednotku času mezi částicemi s počátečními hybnostmi p_1, \dots, p_M do koncových hybností p_{M+1}, \dots, p_N . Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice je tedy (na rozdíl od levé strany) obecně nelineární v rozdělovací funkci částic.

Jestliže rozdělovací funkce některé ze vznikajících částic (např. X_C) není zanedbatelná vůči ϕ_C můžeme do výrazu (1.105) ‘zabudovat’ bosonové nebo fermionové chování této částice přidáním do integrandu na pravé straně členu (jakési ‘modifikované’ rozdělovací funkce¹⁷)

$$\hat{f}_C \equiv 1 \pm \frac{f_C}{\phi_C}, \quad (1.106)$$

kde horní znaménko (+) platí pro bosony (a člen udává zvýšení pravděpodobnosti reakce (1.104) v důsledku stimulované emise) a dolní znaménko (−) pro fermiony (a člen pak udává snížení pravděpodobnosti reakce vlivem Pauliho vylučovacího principu). Takto zobecněný výraz (1.105) však můžeme formálně považovat za příspěvek reakce

$$X'_C + \sum_{B=1}^M X_B \rightleftharpoons \sum_{B=M+1}^N X_B + X''_C, \quad (1.107)$$

jejíž pravděpodobnost

$$P(p'_C, p_1, \dots, p_N, p''_C) = \pm \phi_C^{-1} P(p_1, \dots, p_N) \delta(p'_C - p_C) \delta(p''_C - p_C), \quad (1.108)$$

takže výraz (1.105) lze brát jako obecný tvar srážkového členu.

1.2.3 Momentový rozvoj

K řešení Boltzmannovy rovnice metodou rozvoje do zobecněných momentů ve tvaru (1.65) potřebujeme rozvinout i srážkový člen

$$\left| \left(\frac{\delta f_A}{\delta t} \right)_c \right\rangle = \left(\frac{\delta f_A}{\delta t} \right)_c^\alpha |\alpha\rangle \quad (1.109)$$

a jeho momenty vyjádřit pomocí momentů rozdělovacích funkcí částic účastnících se srážky. Podle (1.105) jsou momenty srážkového členu dány integrálem pravděpodobnosti $P(p_1, \dots, p_N)$ reakce (1.104) přes všechny hybnosti

$$\left(\frac{\delta f_A}{\delta t} \right)_c^\alpha = \langle \alpha | \left(\frac{\delta f_A}{\delta t} \right)_c \rangle = \sum_{C, X_C \equiv X_A} \nu_C \int \langle \alpha(p_C) | P(p_1, \dots, p_N) \prod_{B=1}^M f_B(p_B) \prod_{B=1}^N d^3 p_B. \quad (1.110)$$

Tuto pravděpodobnost můžeme považovat za integrační jádro operátoru

$$\tilde{P} = |\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N\rangle P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_M |, \quad (1.111)$$

přiřazujícího jistému rozdělení $f(p_1, \dots, p_M) = \prod_{B=1}^M f_B(p_B)$ částic vstupujících do reakce (1.104) rozdělení $f(p_{M+1}, \dots, p_N)$ částic vystupujících (báze těchto součinových prostorů jsou tvořeny součiny bázevých prvků v jednočásticových prostorech). Dosazením příslušných rozvoje (1.65) do

¹⁷Zde je zřejmá výhodnost volby elementárního kvantového stavu za jednotku fázového objemu, kdy $\phi_C \equiv 1$.

(1.110) dostaneme moment srážkového členu ve tvaru multilineární kombinace momentů rozdělovacích funkcí částic do reakce (1.104) vstupujících

$$\left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c^\alpha = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_M} P_{A \alpha_1, \dots, \alpha_M}^\alpha \prod_{B=1}^M f_B^{\alpha_B}, \quad (1.112)$$

kde koeficienty $P_{A \alpha_1, \dots, \alpha_M}^\alpha$ jsou dány maticovými elementy $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N}$ operátoru \tilde{P}

$$\begin{aligned} P_{A \alpha_1, \dots, \alpha_M}^\alpha &= + \sum_{C=M+1, X_C \equiv X_A}^N \delta_{\alpha_C}^\alpha P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N} \prod_{B=M+1, B \neq C}^N \langle 1 | \alpha_B \rangle \\ &- \sum_{C=1, X_C \equiv X_A}^M Q_{\alpha_C}^{\alpha \beta_C} P_{\alpha_1, \dots, \beta_C, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N} \prod_{B=M+1}^N \langle 1 | \alpha_B \rangle, \end{aligned} \quad (1.113)$$

kde

$$Q_{\alpha_C}^{\alpha \beta_C} = \langle \beta_C | (\langle \alpha(p) |) | \alpha_C \rangle. \quad (1.114)$$

Koeficient $\langle 1 | \alpha \rangle \equiv \int 1 | \alpha \rangle$ je zpravidla δ_α^0 (jestliže jednička je základním členem ortonormální báze funkcí), takže kladné členy v tomto součtu přes C , tj. členy pro částici X_C vystupující ($C > M$), jsou přímo rovné některým maticovým elementům. Záporné členy (pro částice vstupující, $C \leq M$) jsou naproti tomu zpravidla lineární kombinací více maticových elementů, protože v integrálu (1.110) se k jednomu ket-vektoru (v f_C) vyskytnou dva bra-vektory (v P a $\langle \alpha |$), jejichž součin je nutné nejprve pomocí koeficientů Q rozložit na součet jednotlivých bra-vektorů.

Přímočarý výpočet koeficientů $P_{A \alpha_1, \dots, \alpha_M}^\alpha$ nebo $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N}$ by byl značně obtížný, protože vyžaduje trojnásobnou integraci přes hybnost každé z N částic. Přitom počet těchto koeficientů roste alespoň s $M + 1$. resp. N -tou mocninou počtu uvažovaných momentů rozdělovací funkce. Řada z těchto koeficientů však vypadne a zbylé lze zjednodušit díky symetriím srážky. Je například zřejmé, že pro identické vstupující nebo vystupující částice musí tyto koeficienty být symetrické vůči záměně příslušných indexů. Jestliže P závisí pouze na relativní orientaci hybností částic účastnících se srážky (tj. srážka není anizotropní např. v důsledku vnějšího elektromagnetického pole), pak musí být shodné koeficienty lišící se pouze prohozením prostorových os. Další symetrie koeficientů musí vyplývat ze zákonů zachování hybnosti, popřípadě energie (pro pružnou srážku). Nechtě, obecně, $P(p_1, \dots, p_N)$ je invariantní vůči jistě grupě transformací

$$p \rightarrow p' = p'(p, \xi) \quad (1.115)$$

parametrizované parametrem ξ . Báze $\{|\alpha\rangle\}$ rozvoje (1.65) indukují jistou reprezentaci T_ξ této grupy

$$|\alpha'(p')\rangle = T_\xi^{\alpha'} |\alpha(p)\rangle, \quad (1.116)$$

která určuje transformační vztahy pro maticové elementy $P_{\alpha\beta}^\alpha$

$$P'_{\alpha'}^{\beta'} = (T_\xi^{-1})^{\alpha'}_\alpha P_{\alpha\beta}^\alpha T_\xi^{\beta'}_\beta. \quad (1.117)$$

V důsledku invariance $P(p_1, \dots, p_N)$ vůči (1.115) tedy musí maticové elementy vyhovovat homogenním lineárním rovnicím

$$\left[(T_\xi^{-1})^{\alpha'}_\alpha T_\xi^{\beta'}_\beta - \delta^{\alpha'}_\alpha \delta^{\beta'}_\beta \right] P_{\alpha\beta}^\alpha = 0, \quad (1.118)$$

z nichž můžeme některé elementy vyjádřit jako lineární kombinace jiných. Protože v praxi může být i řešení těchto rovnic obtížné, je výhodnější využívat symetrií P přecházením k takovým bázím v prostorech hybností, v nichž se maticové elementy zjednoduší (např. se stanou diagonální).

Rozvoj pro binární srážku. Jako příklad uveďme výpočet rozvoje srážkového členu do prostorových Hermiteových polynomů $|\vec{\alpha}\rangle = \Pi_{i=1}^3 P_{\alpha_i}(p_i)$ pro binární srážku

$$X_1 + X_2 \rightleftharpoons X'_1 + X'_2 . \quad (1.119)$$

Pokud se omezíme na rozvoj do druhého řádu, tj. na 10 momentů, pak potřebujeme vypočítat řádově 10^3 maticových elementů¹⁸ z celkového počtu 10^4 koeficientů rozvoje pravděpodobnosti $P(p_1, p_2, p'_1, p'_2)$ této reakce jako funkce všech proměnných. Pokud ovšem provedeme transformaci $\{p_1, p_2\} \rightarrow \{p_T, p\}$ (a analogicky pro čárkované veličiny) do těžišťových systémů před a po srážce,

$$p_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2} p_T \mp p , \quad (1.120)$$

kde p_T je hybnost celé soustavy a p hybnost částice s relativní rychlostí ($v = v_2 - v_1$) a redukovanou hmotností ($m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$), pak vzhledem k zachování hybnosti při srážce musí být maticové elementy funkce P úměrné jednotkové matici v indexech α_T, α'_T odpovídajících proměnným p_T, p'_T . Všech 10^4 elementů funkce $P(p_1, p_2, p'_1, p'_2)$ je tak lineární kombinací pouhých 10^2 členů rozvoje téže funkce $P(p, p')$ vyjádřené pouze v proměnných hybnosti relativního pohybu srážejících se částic,

$$\langle \alpha'_1 \alpha'_2 | P | \alpha_1 \alpha_2 \rangle = \langle \alpha'_1 \alpha'_2 | \alpha'_T \alpha'_T \rangle \langle \alpha' | P | \alpha \rangle \langle \alpha_T \alpha | \alpha_1 \alpha_2 \rangle . \quad (1.121)$$

Pravděpodobnost P může kromě invariance vůči volbě rychlosti inerciálního systému (která je speciálním důsledkem výše započteného zákona zachování hybnosti) mít i další symetrie, např. může splňovat zachování energie nebo být invariantní vůči natočení vztažné soustavy. Vliv těchto symetrií se nejnázřejší vyjádří v reprezentaci sférických harmonik¹⁹

$$|nlm\rangle = \sum_{|\alpha|=2n+l} \langle \alpha | nlm \rangle | \alpha \rangle . \quad (1.122)$$

V případě pružné srážky se zachovává kinetická energie relativního pohybu, tj. $|p'| = |p|$. V obecném případě se změní o uvolněnou energii vnitřních stupňů volnosti, tj. $P(p, p') \sim \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE})$. V obou případech však můžeme separovat a integrovat radiální část $P(p, p')$ v proměnné p' . Úhlová závislost pravděpodobnosti rozptylu P zpravidla bývá invariantní vůči rotaci prostoru hybností a závisí pouze na úhlu χ rozptylu mezi směry $\vartheta\varphi$ a $\vartheta'\varphi'$ nalétávající a rozptýlené částice,

$$P(p, p') = \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE}) \frac{p}{m} \sigma(\chi) , \quad (1.123)$$

kde σ je diferenciální účinný průřez. Vhodnou rotací prostoru hybností pak můžeme dosáhnout splynutí směru $\vartheta\varphi$ s osou z a směru $\varphi' = 0$ s osou x , takže zbývá rozvinout úhlovou závislost rozptylu pouze do Legendreových polynomů v $\cos \chi$,

$$\begin{aligned} \langle n'l'm' | P | nlm \rangle &= \langle n'l' | \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE}) \frac{p}{m} \langle l'm' | \sigma(\chi, |p|) | lm \rangle | nl \rangle \\ &= \delta'_l \delta_m^{m'} \langle n'l | \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE}) \frac{p}{m} \sigma^l(|p|) | nl \rangle . \end{aligned} \quad (1.124)$$

Všechny maticové elementy se tak redukují na lineární kombinace několika málo integrálů úhlové a rychlostní závislosti účinného průřezu srážky.

¹⁸Tj. pro všechny indexy částice, pro níž srážkový člen počítáme, a pro indexy obou částic do reakce vstupujících.

¹⁹Protože Hermiteovy polynomy jsou vlastní funkce 1-dim. kvantového harmonického oscilátoru, je zřejmé, že prostorové Hermiteovy polynomy musí být lineární kombinací vlastních funkcí $|nlm\rangle = |nl\rangle |lm\rangle$ příslušného sféricky symetrického hamiltoniánu. Radiální část $|nl\rangle$ je přitom dána zobecněnými Laguerrovými polynomy.

1.3 Termodynamická rovnováha

1.3.1 Entropie a H–teorém

Rozdělovací funkce f umožňuje konkrétně vypočítat střední hodnoty různých makroskopických veličin pro jí popsané makroskopické rozdělení částic a obecně tedy nese jistou informaci o stavu souboru těchto částic. Mírou této informace je Boltzmannova entropie

$$S = k \ln W , \quad (1.125)$$

kde k je Boltzmannova konstanta a W je počet různých mikrostavů odpovídajících danému makrostavu.²⁰ Máme-li např. g stavů pro N identických klasických částic, pak $W^{\text{kl}} = g^N/N!$. Pro Fermiho – Diracovy částice $W^{\text{FD}} = g!/(g - N)!/N!$ (protože s každou částicí ubude jeden stav k dispozici pro ostatní) a pro Boseho – Einsteinovy částice $W^{\text{BE}} = (N + g - 1)!/(g - 1)!/N!$ (protože s každým bosonem roste pravděpodobnost přechodu jiného bosonu do téhož stavu, tedy efektivně přibývá další stav). Dosazením W^{kl} do (1.125) dostaneme pro $N = f\Delta g$ částic v Δg stavech entropii²¹

$$\Delta S^{\text{kl}} = k \ln (\Delta g^N/N!) = kN (\ln \Delta g - \ln N + 1) = kf (1 - \ln f) \Delta g , \quad (1.126)$$

takže objemová hustota entropie klasického plynu²²

$$s^{\text{kl}} = k \int f (1 - \ln f) h^{-3} d^3 p . \quad (1.127)$$

Podobně pro bosonový nebo fermionový plyn²³ (s rozdělovací funkcí f normovanou na elementární kvantový objem fázového prostoru)

$$s = -k \int (f \ln f \mp \hat{f} \ln \hat{f}) h^{-3} d^3 p , \quad (1.128)$$

kde ve shodě s (1.106) $\hat{f} = 1 \pm f$ (horní znaménko platí pro bosony a dolní pro fermiony; výraz (1.127) odtud dostaneme pro $f \ll 1$).

Pro celkovou entropii S , která je integrálem s přes objem, platí tzv. Boltzmannův H–teorém, podle něhož je S veličina neklesající během časového vývoje. Jestliže totiž vyjádříme entropii jako sumu přes elementární kvantové stavy

$$S = k \sum_i f^i (1 - \ln f^i) , \quad (1.129)$$

pro jejichž obsazovací čísla f^i platí kinetická rovnice (viz rov. (1.1))

$$\frac{df^i}{dt} = \sum_{j, i \neq j} (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i) , \quad (1.130)$$

²⁰Počet možných kombinací, resp. pravděpodobnost každé z nich je totiž multiplikativní veličina přes jednotlivé podsystemy, zatímco množství informace o nich je aditivní.

²¹Předpokládáme, že $N \gg 1$, takže můžeme užít Stirlingovy formule $\ln N! \simeq N(\ln N - 1)$, cf. [10]. Tento vztah lze dokázat rekurentně, $\ln(N + 1)! \simeq \ln(N + 1) + N(\ln N - 1) \simeq \ln(N + 1) - 1 + N(\ln N + \ln(1 + 1/N) - 1) = (N + 1)(\ln(N + 1) - 1)$.

²²Sčítání přes jednotlivé stavy přitom nahradíme integrací přes prostor hybností, $d^3 g = h^{-3} d^3 p$.

²³Ve výrazu pro W^{BE} zanedbáváme 1. Dále předpokládáme, že také $g \gg 1$ a $(g - N) \gg 1$.

kde P_{ij} je pravděpodobnost přechodu systému ze stavu i do stavu j , pak derivováním (1.129) a dosazením (1.130) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -k \sum_i \frac{df^i}{dt} \ln f^i = -k \sum_{i \neq j} (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i) \ln f^i = \\ &= k \sum_{i < j} P_{ji} f^j \left(\frac{P_{ij} f^i}{P_{ji} f^j} - 1 \right) \ln \frac{f^i}{f^j} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Pro pravděpodobnosti přechodů mezi elementárními kvantovými stavy platí $P_{ij} = P_{ji}$ (viz rov. (1.2)) a proto každý člen této sumy je nezáporný (protože je úměrný výrazu tvaru $(x-1)\ln x$). Entropie je tedy konstantní právě když všechny přechody s nenulovou pravděpodobností jsou v detailní rovnováze²⁴

$$P_{ji} f^j - P_{ij} f^i = 0. \quad (1.132)$$

V opačném případě roste, dokud není dosaženo tohoto rovnovážného stavu. Ke stejnému výsledku dojdeme, vyjdeme-li místo z rov. (1.129) z výrazu pro bosony nebo fermiony analogického (1.128) a na pravé straně rov. (1.130) doplníme modifikovanou rozdělovací funkci \hat{f} koncových stavů.

Cvičení 3 *Dokažte Boltzmannův H-teorém pro kvantový plyn. Uvažte, jaký tvar má v tomto případě mít rov. (1.130).*

1.3.2 Rovnovážné rozdělení

Hledejme nyní explicitní tvar rozdělení v rovnovážném stavu. Při rovnováze s tepelnou lázní o dané teplotě prostřednictvím anihilace a kreace částic musí být hustota energie

$$\varepsilon = \int E f h^{-3} d^3 p, \quad (1.133)$$

kde $E = E(p)$ je energie jedné částice (tento vztah je zobecněním (1.32)), rovna zadané hodnotě. Při rovnováze s lázní pouze prostřednictvím srážek, při nichž se počet částic zachovává, musí být navíc i hustota částic daná výrazem (1.29) rovna zadané hodnotě. V obou případech tedy bude rovnovážný stav určen vázaným extrémem hustoty entropie s s vazbovými podmínkami $\varepsilon = \text{konst.}$ nebo $\varepsilon = \text{konst.}$ a $n = \text{konst.}$ (přitom implicitně předpokládáme, že f vyjadřujeme ve vlastní klidové soustavě plynu, takže nemusíme klást další podmínku na hodnotu hustoty hybnosti, která je nulová)

$$0 = \delta s - \alpha \delta n - \beta \delta \varepsilon. \quad (1.134)$$

Pro fermionový nebo bosonový plyn podle (1.128)

$$\delta s = -k \int \left((\ln f + 1) \delta f \mp (\ln \hat{f} + 1) \delta \hat{f} \right) h^{-3} d^3 p = -k \int \left(\ln f - \ln \hat{f} \right) \delta f h^{-3} d^3 p, \quad (1.135)$$

neboť $\delta \hat{f} = \pm \delta f$. Proto tedy podle (1.134), (1.29) a (1.133)

$$0 = - \int \left[k \left(\ln f - \ln \hat{f} \right) + \alpha + \beta E \right] \delta f h^{-3} d^3 p \quad (1.136)$$

²⁴Je třeba si uvědomit, že $P_{ij} \neq 0$ pouze pro stavy i a j (viz rov. (1.3)) se stejnou energií a proto je v pořádku, že i obsazení těchto stavů jsou v rovnováze stejná. Přechody mezi stavy s různou energií (a rozdílným obsazením) jsou možné pouze interakcí a výměnou energie s jiným systémem – např. excitace atomu zářením, nebo změna kinetické energie částice srážkou s jinou částicí. V tom případě však indexy i, j musí určovat elementární stavy obou podsystémů a f^i, f^j jsou součiny obsazení obou podsystémů.

pro každé δf , takže

$$\ln \frac{1 \pm f}{f} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k} E. \quad (1.137)$$

Odtud po přeznačení lagrangeovských součinitelů

$$\alpha = -\frac{\mu}{T}, \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (1.138)$$

dostaneme rovnovážné rozdělení bosonového nebo fermionového plynu ve tvaru

$$f = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \mp 1}. \quad (1.139)$$

Podobně pro klasický plyn můžeme variovat vztah (1.127), takže odpadne člen s $\ln \hat{f}$ (což odpovídá předpokladu $f \ll 1$) a výsledkem je Boltzmanovo rozdělení

$$f = \exp\left(-\frac{E-\mu}{kT}\right), \quad (1.140)$$

kteří lze dostat rovněž jako limitu zanedbáním jedničky ve jmenovateli (1.139).

V případě volného vzniku a zániku částic (např. pro fotony absorbované a vyzařované jinými částicemi) bude n libovolné a proto $\alpha=0$ i chemický potenciál $\mu=0$. Při dané hustotě n částic je vztah

$$n = \int f h^{-3} d^3 p = \int \frac{h^{-3} d^3 p}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \mp 1} \quad (1.141)$$

implicitní rovnicí pro chemický potenciál $\mu = \mu(n, T)$, nebo spolu s rovnicí (1.133) soustavou rovnic pro $\mu = \mu(n, \varepsilon)$, $T = T(n, \varepsilon)$. Pro proměnné n je (1.133) implicitní rovnicí pro $T = T(\varepsilon)$ a rovnice (1.141) pak udává závislost $n = n(T)$.

Např. pro degenerovaný fermionový plyn, tj. pro teploty $kT \ll \mu$, je $f \simeq \exp(-\frac{E-\mu}{kT}) \rightarrow 0$ pro $E > \mu$ a $f \simeq 1 - \exp(\frac{E-\mu}{kT}) \rightarrow 1$ pro $E < \mu$, takže²⁵

$$\begin{aligned} n &= \int f h^{-3} d^3 p \simeq 4\pi h^{-3} \left[\int_0^{p_\mu} p^2 dp + \int_0^\infty \frac{4p_\mu \Delta}{1 + \exp\left(\frac{\Delta}{kT} \frac{dE}{dp}\right)} d\Delta \right] = \\ &= \frac{4\pi}{3h^3} p_\mu^3 \left(1 + \left[\frac{\pi kT}{p \frac{dE}{dp}} \right]_{p_\mu}^2 \right), \end{aligned} \quad (1.142)$$

kde jsme zavedli transformaci $p \rightarrow \Delta = p - p_\mu$ a p_μ je řešením rovnice $E_\mu \equiv E(p_\mu) = \mu$. Pro nulovou teplotu je p_μ rovno Fermiho hybnosti p_F definované vztahem

$$n = \frac{4\pi}{3h^3} p_F^3. \quad (1.143)$$

Pro nenulovou teplotu se chemický potenciál liší od Fermiho energie $E_F = E(p_F)$ o veličinu řádu $o(T^2)$. Podobně hustota energie

$$\varepsilon = \int f E(p) h^{-3} d^3 p \simeq 4\pi h^{-3} \left[\int_0^{p_\mu} E(p) p^2 dp + \int_0^\infty \frac{2p_\mu (2E_\mu + p_\mu \frac{dE}{dp}) \Delta}{1 + \exp\left(\frac{\Delta}{kT} \frac{dE}{dp}\right)} d\Delta \right] =$$

²⁵Užíváme přitom substituce $p = p_\mu + \Delta$ pro $p > p_\mu$ a $p = p_\mu - \Delta$ pro $p < p_\mu$ a přiblížení $E(p) \simeq \mu + \left[\frac{dE}{dp}\right]_{p_\mu} \Delta$, v němž $p^2 / [\exp(\frac{E-\mu}{kT}) + 1] \simeq (p_\mu + \Delta)^2 / [1 + \exp(E'\Delta/kT)] = p^2 - (p_\mu + \Delta)^2 / [1 + \exp(-E'\Delta/kT)]$.

$$= 4\pi h^{-3} \left[\int_0^{p_\mu} E(p) p^2 dp + 2p_\mu (2E_\mu + p_\mu \frac{dE}{dp}) \left[\frac{\pi kT}{\frac{dE}{dp}} \right]_{p_\mu}^2 \right]. \quad (1.144)$$

Výsledná hustota entropie rovnovážného rozdělení je

$$\begin{aligned} s &= \int \left[\mp k \ln \left(1 \mp \exp\left(-\frac{E-\mu}{kT}\right) \right) + f \frac{E-\mu}{T} \right] h^{-3} d^3p = \\ &= \frac{1}{T} \int p^{(i)} \frac{\partial E}{\partial p^{(i)}} f h^{-3} d^3p - \frac{\mu}{T} n + \frac{1}{T} \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.145)$$

kde i je libovolná prostorová složka 1, 2 nebo 3 (první řádek integrujeme per-partes v p^i , závorka ukazuje, že přes i nesčítáme). Speciálně, jestliže $E = E(|p|)$, pak první člen můžeme dále upravit, takže

$$s = \frac{1}{3T} \int |p| \frac{dE}{d|p|} f h^{-3} d^3p - \frac{\mu}{T} n + \frac{1}{T} \varepsilon. \quad (1.146)$$

V případě nerelativistických částic, pro které

$$E = \frac{|p|^2}{2m}, \quad (1.147)$$

dostaneme

$$s = \frac{5}{3T} \varepsilon - \frac{\mu}{T} n. \quad (1.148)$$

V případě ultrarelativistických částic (např. fotonů), pro které je

$$E = c|p|, \quad (1.149)$$

dostaneme hustotu entropie

$$s = \frac{4}{3T} \varepsilon - \frac{\mu}{T} n, \quad (1.150)$$

přičemž $n = M^0$ a $\varepsilon = cM^1$ a obecný moment radiální části rovnovážné rozdělovací funkce²⁶

$$M^n \equiv \int |p|^n f h^{-3} d^3p = \pm 4\pi(n+2)! h^{-3} \left(\frac{kT}{c} \right)^{n+3} F\left(\pm \exp\left(-\frac{\mu}{kT}\right), n+3\right). \quad (1.151)$$

1.3.3 Rovnováha chemických reakcí

Pro směs částic různých typů X , které mohou být stále popsány nezávislými jednočásticovými funkcemi f_X , jsou celkové hustoty entropie a energie součty příspěvků hustot od jednotlivých typů částic, takže rovnici (1.134) je třeba zobecnit do tvaru

$$0 = \delta \sum_X s_X - \sum_X \alpha_X \delta n_X - \beta \sum_X \delta \varepsilon_X, \quad (1.152)$$

²⁶Zde speciální funkce F je dána vztahem

$$F(z, s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} z^k = z \Phi(z, s, 1), \quad \Phi(z, s, v) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (v+k)^{-s} z^k.$$

Speciálně pro $z = 1$

$$F(1, s) = \zeta(s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s},$$

kde ζ je Riemannova zeta funkce, $\zeta(3) \doteq 1.2020569031596$ a $\zeta(4) = \pi^4/90 \doteq 1.0823232337111$.

a variovat vůči všem f_X . Proto dostáváme rovnice typu (1.139) pro každé f_X se stejnou teplotou T (pokud dochází k výměně energie mezi různými typy částic), ale s různými chemickými potenciály μ_X , jestliže hustoty částic příslušného typu jsou fixovány (nebo s nulovými μ_X , když částice mohou vznikat a zanikat).

Jestliže dochází k chemické reakci

$$\sum_X \nu_X X \rightleftharpoons 0 \quad (1.153)$$

mezi částicemi různých typů, pak jejich chemické potenciály nemohou být nezávislé, ale musí splňovat lineární rovnice

$$\sum_X \nu_X \mu_X = 0 . \quad (1.154)$$

Příklad rovnováhy reakce beta-rozpadu

$$n \rightleftharpoons p + e + \bar{\nu} , \quad (1.155)$$

s relativistickými hodnotami Fermiho energie elektronů a nerelativistickými nukleony²⁷ je znázorněn na obr. 1.3. Tato reakce hraje důležitou roli při vzniku neutronových hvězd. Vzhledem ke kvazineutralitě musí být hustoty a v termodynamické rovnováze podle rov. (1.143) tedy i Fermiho hybnosti elektronů a protonů stejné, což ovšem vzhledem k řádovému rozdílu jejich klidových hmotností znamená, že elektrony mohou být již silně relativistické, zatímco protony stále nerelativistické,

$$m_e c \ll p_{F,e} = p_{F,p} \ll m_p c , \quad (1.156)$$

a Fermiho energie elektronů (a tím i chemický potenciál) podstatně větší než protonů

$$p_{F,p}^2 / (2m_p) \simeq E_{F,p} \ll E_{F,e} \simeq p_{F,e} c . \quad (1.157)$$

Podle rovnice (1.154) ovšem

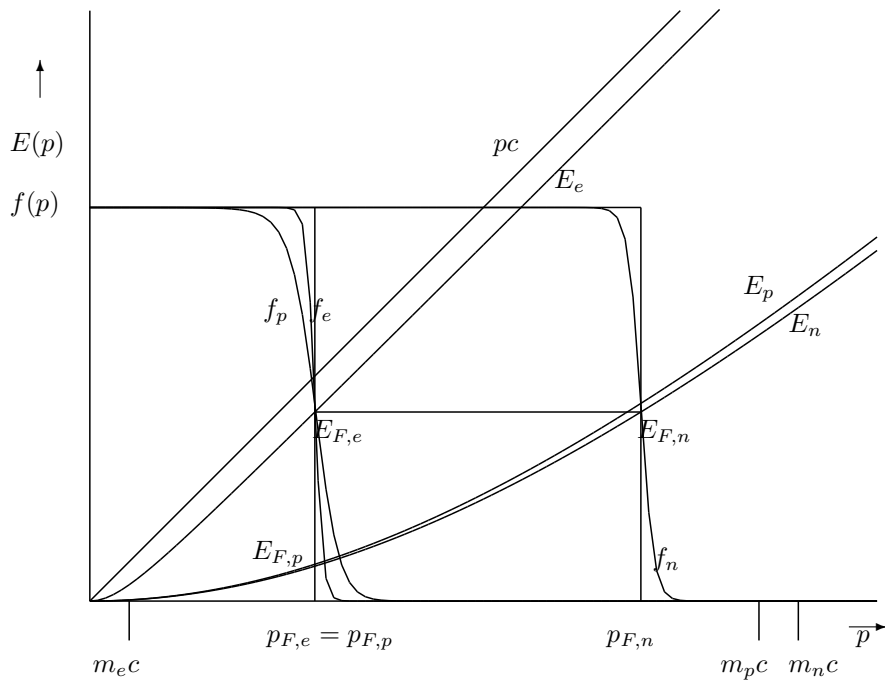
$$\mu_e + \mu_p = \mu_n \quad (1.158)$$

(když předpokládáme, že vzniklá neutrina mohou z prostoru hvězdy volně unikat, takže jejich hustota není fixována a jejich chemický potenciál je nulový), takže chemický potenciál neutronů musí být vyrovnán především chemickým potenciálem elektronů a tedy

$$E_{F,p} \ll E_{F,e} \simeq E_{F,n} . \quad (1.159)$$

Fermiho hybnost a tím i hustota neutronů je proto v rovnováze podstatně větší než hybnosti resp. hustoty elektronů a protonů.

²⁷Tento tzv. URCA proces, ve kterém vznikající neutrina a antineutrina odnášejí energii, se uplatňuje v ochlazování vznikajících neutronových hvězd.



Obrázek 1.3: Rovnováha reakce $n \rightleftharpoons p + e + \bar{\nu}$ s relativistickou Fermiho energií elektronů a nerelativistickými nukleony.

Kapitola 2

Teorie kosmického plazmatu

Tato kapitola obsahuje pasáže z navazující přednášky NTMF028 “Teorie kosmického plazmatu” vedené původně spolu s prof. M. Karlickým a od roku 2020s dr. J. Horákem z AsÚ AVČR.

2.1 Zářivá hydrodynamika

Pro vznik a vývoj plazmatu je důležitá interakce hmoty se zářením, které může dodávat nebo odnášet energii potřebnou k její ionizaci, a změnou tlaku nebo přímou výměnou hybnosti ovlivňovat také její dynamiku. Shrňme proto nejprve popis pole záření.

2.1.1 Klasická teorie přenosu záření

Ve fyzikální interpretaci (1.29) až (1.32) momentů f jsme předpokládali, že popisujeme pouze nerelativistické částice. Víme však, že i foton má svoji hybnost

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{n}, \quad (2.1)$$

kde ν je jeho frekvence a \vec{n} jednotkový vektor ve směru pohybu. Pole záření bývá zvykem popisovat specifickou intenzitou I_ν udávající zářivou energii dE , která projde jednotkovou plochou d^2S kolmou k \vec{n} za jednotkový čas dt do jednotkového prostorového úhlu $d^2\Omega$ v jednotkovém frekvenčním intervalu $d\nu$. Tyto fotony ovšem zaujímají objem $d^3p = p^2 dp d^2\Omega = h^3 \nu^2 / c^3 d\nu d^2\Omega$ v hybnostním prostoru a plochou d^2S projdou ty, které se nacházejí ve válci objemu $d^3x = c dt d^2S$, přičemž každý nese energii $h\nu$. Prošlou energii tedy můžeme vyjádřit také pomocí rozdělovací funkce f fotonů

$$dE = I_\nu d^2S dt d^2\Omega d\nu = h\nu \sum f(p) d^3x d^3p / h^3, \quad (2.2)$$

kde se sčítá přes obě polarizace fotonu. Odtud dostáváme vztah specifické intenzity a rozdělovací funkce fotonů

$$I_\nu(t, x, \vec{n}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} f(t, x, p). \quad (2.3)$$

Vzhledem k odlišnému vztahu rychlosti, hybnosti a energie u relativistických a ultrarelativistických částic je pro ně třeba upravit fyzikální interpretaci momentů f . Číselná hustota fotonů (obou polarizací) je dána analogicky (1.29) vztahem

$$n_r = 2 \int f \frac{d^3p}{h^3} = \int \frac{1}{ch\nu} I_\nu d\nu d^2\Omega, \quad (2.4)$$

z makroskopického hlediska je však významnější hustota zářivé energie

$$\varepsilon_r = 2 \int h\nu f \frac{d^3p}{h^3} = \frac{1}{c} \int I_\nu d\nu d^2\Omega, \quad (2.5)$$

což je analogie (1.32) pro ultrarelativistické částice (pro které energie $E = pc$). Hustota hybnosti pole záření π_r^i je úměrná hustotě toku zářivé energie

$$F_r^i = c^2 \pi_r^i = 2 \int h\nu n^i c f \frac{d^3p}{h^3} = \int n^i I_\nu d\nu d^2\Omega, \quad (2.6)$$

a tenzor napětí (tlak) záření, tj. hustota toku hybnosti je podobně (1.31)

$$T_r^{ij} = 2 \int h\nu n^i n^j f \frac{d^3p}{h^3} = \frac{1}{c} \int n^i n^j I_\nu d\nu d^2\Omega. \quad (2.7)$$

Rovněž transformační vlastnosti při přechodu k jinému inerciálnímu systému jsou odlišné pro relativistický a nerelativistický plyn a podrobněji se jimi budeme zabývat v kapitole 2.2. Jestliže však známe pohybové rovnice fotonu, které např. v kartézských souřadnicích ve vakuu mají jednoduchý tvar $\dot{\vec{x}} = c\vec{n}$, $\dot{\vec{p}} = 0$, který zjevně splňuje Liouvilleův teorém, pak i pro rozdělovací funkci fotonů platí Boltzmannova rovnice (1.45), kterou můžeme podle (2.3) přepsat pomocí I_ν jako tzv. rovnici přenosu záření

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + n^i \frac{\partial I_\nu}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta I_\nu}{c \delta t} \right)_c. \quad (2.8)$$

Její integrací přes prostor hybností dostaneme rovnici kontinuity energie záření

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_r + \frac{\partial}{\partial x^i} F_r^i = \int \left(\frac{\delta I_\nu}{c \delta t} \right)_c d\nu d^2\Omega, \quad (2.9)$$

a jejím vynásobením n^k/c a integrací rovnici kontinuity hybnosti záření

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_r^k + \frac{\partial}{\partial x^i} T_r^{ki} = \int \frac{n^k}{c} \left(\frac{\delta I_\nu}{c \delta t} \right)_c d\nu d^2\Omega. \quad (2.10)$$

V křivočarých souřadnicích se modifikuje závislost $\dot{x}^i = \dot{x}^i(\vec{n}) = ch_j^i n^j$, kde $h_j^i = h_j^i(x)$ jsou metrické koeficienty dané vztahem zpravidla ortonormální báze, v níž složky \vec{n} vyjadřujeme, k souřadnicové bázi.¹ Také $\dot{n}^i \neq 0$, takže podobnost rovnice přenosu záření s Boltzmannovou rovnicí (1.45) je ještě nápadnější. V diferenciálně se pohybujícím prostředí se obecně mění dopplerovsky i ν a \vec{n} je navíc ovlivněno i aberací. V kapitole 2.2 uvidíme, že f je – na rozdíl od I_ν – lorentzovsky invariantní.² Rovnice přenosu záření má v tom případě obecný tvar

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + h_j^i n^j \frac{\partial I_\nu}{\partial x^i} + \sum_{(i)=1}^2 \frac{dn^{(i)}}{c dt} \frac{\partial I_\nu}{\partial n^{(i)}} + \frac{d\nu}{c dt} \nu^3 \frac{\partial(\nu^{-3} I_\nu)}{\partial \nu} = \left(\frac{\delta I_\nu}{c \delta t} \right)_c, \quad (2.11)$$

kde ve třetím členu derivujeme a sčítáme pouze přes dva nezávislé směrové kosiny nebo jiné parametry úhlové závislosti $I_\nu(\vec{n})$. Protože tento zápis je méně přehledný a přitom svojí podstatou ekvivalentní (1.45), je obecně přirozenější vycházet rovnou z Boltzmannovy rovnice. V mnohých případech očekávané symetrie řešení (např. slabé úhlové a výrazné frekvenční závislosti rozdělovací funkce) ovšem může být výhodná volba sférických souřadnic v prostoru hybností, kterou ν a \vec{n} reprezentují.

¹Metrické koeficienty dávají alternativní vyjádření metriky g_{ik} , neboť $1 = g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = g_{ik} h_j^i h_l^k n^j n^l = \delta_{jl} n^j n^l$.

²Proto specifická intenzita se transformuje jako $I'_\nu = (\nu'/\nu)^3 I_\nu$, celková intenzita $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$ jako $I'/I = (\nu'/\nu)^4$, a např. efektivní teplota záření $T_{\text{ef.}} \sim I^{\frac{1}{4}}$ jako $T'_{\text{ef.}}/T_{\text{ef.}} = \nu'/\nu$, jak pozorujeme např. u dipólové anizotropie reliktního záření.

Cvičení 4 *Odvoďte konkrétní tvar rovnice přenosu záření ve statických sférických souřadnicích pro obecné i sféricky symetrické pole záření.*

Levá strana rovnice přenosu záření (2.8) je teď totální derivace $\frac{d}{ds}I_\nu$ nikoliv podle času ale podle dráhy s měřené podél paprsku. Srážkový člen na pravé straně rovnice (2.8) bývá zpravidla vyjádřen ve tvaru

$$\left(\frac{\delta I_\nu}{c \delta t}\right)_c = \alpha_\nu(S_\nu - I_\nu), \quad (2.12)$$

kde opacita $\alpha_\nu \equiv \kappa_\nu \rho$ (resp. specifická opacita κ_ν) udává pravděpodobnost absorpce fotonu na jednotkové dráze s (a bývá dána součinem číselné hustoty absorbujících částic a jejich účinného průřezu) a vydatnost S_ν vyjadřuje příspěvek emitovaného (a rozptýleného) záření v daném směru a frekvenci. Pokud jsou opacita a vydatnost známé funkce, můžeme snadno nalézt formální řešení lineární rovnice (2.8) s pravou stranou (2.12) ve tvaru

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) \exp(t - \tau_\nu) dt, \quad (2.13)$$

kde jsme zavedli monochromatickou optickou hloubku τ_ν jako novou proměnnou substitucí

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds. \quad (2.14)$$

Pokud ovšem dochází k rozptylu, pak vydatnost obsahuje členy závislé přes jisté integrální jádro na intenzitách ve všech jiných směrech (ev. i frekvencích při frekvenční redistribuci), takže rovnici přenosu záření je třeba řešit jako soustavu integrodiferenciálních rovnic pro všechny paprsky a frekvence.

Opacitu a vydatnost v klidovém systému prostředí lze často považovat za izotropní. V tom případě lze rovnici (2.10) pro gradient tlaku záření zjednodušeně zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_r^k + \frac{\partial}{\partial x^i} T_r^{ki} = -\bar{\alpha} F_r^k, \quad (2.15)$$

kde $\bar{\alpha} \equiv \int \alpha_\nu F_\nu^k d\nu / \int F_\nu^k d\nu$ je efektivní opacita.

2.1.2 Fenomenologická hydrodynamika a zářivá hydrodynamika

Hydrodynamický popis kapalin i plynů bývá zpravidla odvozován z fenomenologické představy kontinua, jehož fyzikální charakteristiky jako hustota ρ , rychlost \vec{v} atd. jsou funkcemi času t a polohy popsané zvolenými ‘Eulerovými’ souřadnicemi x ($f = f(t, x)$). Vývoj kontinua je pak dán parciálními diferenciálními rovnicemi pro tyto veličiny. V tomto kontinuu je možné určit identitu jeho libovolné části a sledovat její pohyb $x = x(t, x_0)$, kde x_0 jsou (‘co-moving’, tj. souběžné) ‘Lagrangeovy’ souřadnice, přičemž pole rychlosti je dáno

$$v = \frac{\partial}{\partial t} x(t, x_0). \quad (2.16)$$

Pohybové rovnice lze převést z eulerovského do lagrangeovského popisu zavedením ‘proudové’ časové derivace

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \nabla). \quad (2.17)$$

Zvolíme-li jistou oblast Ω_0 lagrangeovských souřadnic, pak její objem v čase t je dán

$$V(t) = \int_\Omega d^3x = \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} \right| d^3x_0. \quad (2.18)$$

Proudová derivace objemu je (srov. pozn. 6 na str. 9)

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} \right| d^3x_0 = \int_{\Omega_0} \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \left| \frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} \right| d^3x_0 = \int_{\Omega} (\nabla v) d^3x \simeq V \cdot (\nabla v) \quad (2.19)$$

(kde jsme v každém členu rozderivovaného determinantu užili úpravy $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x_0^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^j}$, poslední rovnost platí pro infinitesimálně malé oblasti Ω). Předpokládáme-li tedy, že celková hmotnost $M = \rho V$ této oblasti se zachovává, pak odtud dostaneme rovnici kontinuity v lagrangeovském resp. eulerovském tvaru

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla v) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0. \quad (2.20)$$

Podobně, předpokládáme-li, že celková změna hybnosti je dána silou (tlakovou i objemovou) působící na element kontinua, dostaneme pohybovou ‘Navierovu – Stokesovu rovnici’

$$\rho \frac{dv}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v \right) = f - \nabla P, \quad (2.21)$$

kde f je nyní objemová hustota síly (např. $-\rho \nabla \Phi$ v případě skalárního potenciálu) a P je tlak (nebo anizotropní tenzor napětí pro viskozni kontinuum). Velikost tlaku je zpravidla určena příslušnou stavovou rovnicí

$$P = P(\rho, T). \quad (2.22)$$

Teplota T , která souvisí s hustotou tepelné energie, je buď dána termodynamickou rovnováhou s jistou tepelnou lázní (např. polem záření), nebo musí být řešena z rovnice energetické rovnováhy. Při konstruování této rovnice je třeba vzít v úvahu, že ke změně tepelné energie $E = \varepsilon V$ pohybujícího se elementu plynu o objemu V přispívá (kromě ostatních procesů s výkonem \dot{E}_+) i práce vykonaná stlačováním proti jeho tlaku,

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon V) = \dot{E}_+ - P \frac{dV}{dt}. \quad (2.23)$$

Například pro plyn s l stupni volnosti na každou částici je

$$\varepsilon = \frac{l}{2} nkT = \frac{l}{2} P, \quad (2.24)$$

takže při adiabatické expanzi ($\dot{E}_+ = 0$)

$$0 = \frac{d}{dt}(\varepsilon V) + P \frac{dV}{dt} = \frac{l}{2} V^{-\frac{2}{l}} \frac{d}{dt}(P V^{\frac{2+l}{l}}), \quad (2.25)$$

tj.

$$P = P_0 V_0^\kappa V^{-\kappa} \sim \rho^\kappa, \quad (2.26)$$

kde koeficient adiabatické expanze

$$\kappa = \frac{2+l}{l}, \quad (2.27)$$

takže

$$l = \frac{2}{\kappa - 1} \quad (2.28)$$

a

$$\varepsilon = \frac{P}{\kappa - 1}. \quad (2.29)$$

Rovnice energetické rovnováhy tedy bude mít tvar

$$\frac{d}{dt}\varepsilon + \kappa\varepsilon(\nabla v) = \dot{\varepsilon}_+ , \quad (2.30)$$

kde na pravé straně vystupuje objemová hustota výkonu ostatních procesů $\dot{\varepsilon}_+ = \dot{E}_+/V$, např. termonukleárních reakcí, energie absorbované ze záření (kterou lze určit z řešení rovnice přenosu záření), nebo divergence toku tepelné energie proudícího vedením – srov. (1.61) pro ideální plyn, pro který $l = 3$ a $\kappa = \frac{5}{3}$.

V obecném případě, když vnitřní stupně zahrnují např. excitaci a ionizaci, je vnitřní energie dána integrálem rovnice (2.23) pro $\dot{E}_+ = 0$, tedy

$$\varepsilon V = - \int P dV . \quad (2.31)$$

Zářivá hydrodynamika je obor problémů dynamiky kontinua (zpravidla plynu), která je podstatně ovlivněna interakcí se zářením. Toto ovlivnění může být na různých úrovních. Nejčastěji zářivé členy vystupují jako zdroje (nebo ztráty) v rovnici energetické rovnováhy, tedy jako jeden ze zdrojů $\dot{\varepsilon}$ na pravé straně rov. (1.61). Tím, že záření ohřívá nebo ochlazuje plyn, mění jeho teplotu a tlak, a tím ovlivňuje jeho dynamiku. Tlak plynu může být změněn i fotoionizací (nebo fotodisociací), která změní v rov. (2.22) při konstantní hustotě hmoty ρ střední hmotnost volné částice a číselnou hustotu částic n . Záření však může mít i přímý dynamický účinek. Tím, že každý foton nese hybnost úměrnou své energii, může měnit hustotu hybnosti (a tedy přímo rychlostní pole) částic plynu nejen při absorpci a emisi, ale i při rozptylu. Tento zdroj hybnosti vystupuje na pravé straně rov. (2.21) buď jako hustota síly a nebo (podle rovnice přenosu záření ekvivalentně) jako gradient tlaku záření neseného polem záření. Řešení úloh zářivé hydrodynamiky zpravidla vyžaduje kromě řešení dynamických rovnic plynu uvedených v tomto odstavci i řešení rovnice přenosu záření uvedené v odstavci 2.1.1. Rovnice přenosu v pohybujícím se prostředí je ovšem značně komplikovaná, zejména pokud rychlosti plynu nejsou zanedbatelné vůči rychlosti světla. Pak totiž absorpční a emisní koeficienty (vůči nehybné vztažné soustavě) závisí na směru fotonu i plynu. Tuto potíž můžeme zpravidla obejít přechodem k souběžným souřadnicím (nebo alespoň co-moving vztažné tetradě, která nemusí být souřadnicová), čímž se ovšem naopak zkomplikuje levá strana rovnice přenosu. V obou případech potřebujeme transformovat veličiny vztahující se k ultrarelativistickým částicím (fotonům) mezi různými inerciálními soustavami (byť třeba se vzájemnými rychlostmi zcela nerelativistickými). Tyto transformace je třeba buď provést lorentzovsky invariantně a pak odvodit jejich nerelativistické aproximace, nebo alespoň postupovat velmi opatrně při intuitivním zanedbávání relativistických korekcí i při interpretaci získaných výsledků.

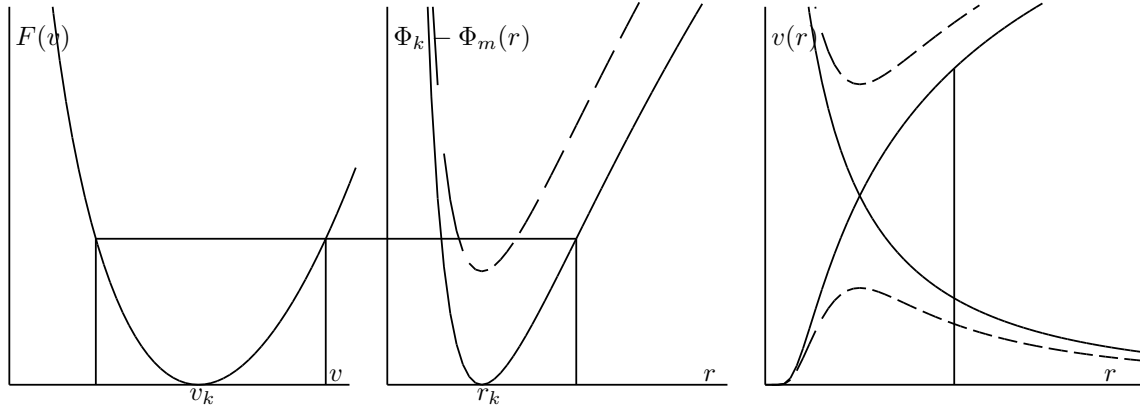
2.1.3 Radiální akrece a hvězdný vítr

Jako příklad aplikace klasické zářivé hydrodynamiky vypočítáme stacionární radiální tok prostředí s rychlostí $v^i = v(r)r^i/r$. Z eulerovského tvaru rovnice kontinuity (2.20) dostáváme rovnici

$$0 = \nabla^i \left(\frac{\rho(r)v(r)}{r} r^i \right) = r^{-2} \frac{d}{dr} (\rho(r)v(r)r^2) , \quad (2.32)$$

která má řešení

$$\rho(r)v(r)r^2 = h , \quad (2.33)$$



Obrázek 2.1: Sféricky symetrický tok kontinua.

kde h je tok hmoty do jednotkového prostorového úhlu konstantní pro všechna r (kladný pro výtok a záporný pro akreci). Pohybová rovnice (2.21) má nenulovou pouze radiální složku

$$\rho(r)v \frac{dv}{dr} = -\rho g - \frac{d}{dr}(P + P_r), \quad (2.34)$$

kde g je gravitační zrychlení a P_r je radiální složka tenzoru napětí pole záření (2.7), jejíž gradient lze vyjádřit podle (2.15) rovněž pomocí radiálního toku záření. Tlak plynu P je stavovou rovnicí (2.22) svázán s hustotou ρ a teplotou T . Známe-li teplotní režim, který může být dán interakcí s polem záření (např. jako izotermický) nebo může být adiabatický aj., pak je tlak P svázán s hustotou ρ , kterou lze pomocí (2.33) vyjádřit pomocí rychlosti v , pro kterou tak dostáváme jedinou diferenciální rovnici

$$\left(v - \frac{kT}{m} \frac{1}{v}\right) \frac{dv}{dr} = -g - r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{kT}{mr^2}\right) + \frac{\bar{\kappa}}{c} F_r. \quad (2.35)$$

Její integrací dostáváme implicitní algebraickou rovnici pro v ve tvaru

$$F(v) = \Phi_k - \Phi_m(r), \quad (2.36)$$

kde např. pro izotermický případ má funkce $F(v)$ na levé straně tvar

$$F(v) = \frac{1}{2}(v^2 - v_k^2) - \frac{kT}{m} \ln \left| \frac{v}{v_k} \right| \quad (2.37)$$

s minimem rovným nule v kritickém bodě

$$v_k = \sqrt{\frac{kT}{m}}. \quad (2.38)$$

Na pravé straně rovnice (2.36) je modifikovaný potenciál $\Phi_m(r)$, který má v izotermickém případě (a při konstantní efektivní specifické opacitě $\bar{\kappa} = \bar{\alpha}/\rho = \int \alpha F_r d\nu / (\rho \int F_r d\nu)$ v opticky tenkém případě) tvar

$$\Phi_m(r) = \int \left(g - 2 \frac{kT}{mr} - \frac{\bar{\kappa}}{c} F_r \right) dr = -\frac{GM}{r} - 2 \frac{kT}{m} \ln(r) + \frac{\bar{\kappa}L}{4\pi cr}, \quad (2.39)$$

opět s extrémem v kritickém bodě

$$r_k = \frac{m}{2kT} \left(GM - \frac{\bar{\kappa}L}{4\pi c} \right), \quad (2.40)$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost tělesa a $L = 4\pi r^2 F_r$ jeho luminosita. Aby existovalo řešení $v(r)$ pro všechna r , musí integrační konstanta $\Phi_k \geq \Phi_m(r_k)$. Pokud $\Phi_k > \Phi_m(r_k)$, existují dvě řešení, jedno s rychlostí podkritickou a druhé s nadkritickou (viz přerušované čáry v obr. 2.1). V případě $\Phi_k = \Phi_m(r_k)$ jsou tato řešení v kritickém bodě propojena, takže lze vybrat řešení hvězdného větru, které je asymptoticky pro $r \rightarrow 0$ statické a pro $r \rightarrow \infty$ dynamické, nebo řešení radiální akrece, u kterého je tomu naopak a jehož rychlost je záporná (viz plné čáry v obr. 2.1). Přitom předpokládáme, že specifická opacita $\bar{\kappa}$ je konstantní a záření tělesa je natolik malé, že

$$L < \frac{4\pi c}{\bar{\kappa}} GM \equiv L_{\text{Edd}}, \quad (2.41)$$

takže přitažlivý gravitační potenciál převládá nad odpudivým tlakem záření (pravá strana této nerovnosti je tzv. Eddingtonova luminosita L_{Edd} a luminosita L splňující tuto podmínku se nazývá pod-eddingtonovská). Konstantnost $\bar{\kappa}$ splňuje např. Thomsonův rozptyl na volných elektronech $\kappa_T = n_e \sigma_T / \rho$ (pokud zůstává konstantní n_e / ρ), který je pro nerelativistické elektrony frekvenčně nezávislý. Obecně je však opacita závislá na hustotě (např. pravděpodobnost volně-volných přechodů roste se čtvercem hustoty) i frekvenci záření, takže je třeba znát spektrální rozložení záření i stav hmoty pro všechna r .

Ve frekvencích, v nichž je vysoká opacita, může být hvězdný vítr opticky tlustý, takže záření centrálního zdroje může být z větší části absorbováno a přerozděleno do jiných frekvencí a směrů, čímž se tlak záření efektivně snižuje. To nastává zejména v rezonančních spektrálních čarách, které ovšem dopplerovský posun vznikající v důsledku gradientu rychlosti průběžně posouvá do sousedních frekvencí s dosud neabsorbovaným zářením. Urychlování hvězdného větru tlakem záření tak může pokračovat dokud se neuplatní tzv. line-locking mechanismus, v němž se důležitá absorpční čára posune do oblasti spektra absorbované jinými přechody. Příkladem jsou výtrysky s koncovou rychlostí blízkou $0,28c$ (např. asi $0,26c$ u SS 433), která odpovídá relativistickému dopplerovskému posunu $(1 - \beta) / \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\nu_{L\alpha}}{\nu_{L\infty}} = \frac{3}{4}$ čáry Lyman α ke hraně lymanovské série, za níž je záření centrálního objektu utlumené lymanovským kontinuem.

Specifická opacita tedy může záviset i na průběhu rychlosti. V případě rychlého monotonního vzrůstu můžeme optickou hloubku v jedné čáře rozšířené tepelnou rychlostí v_T vypočítat pomocí tzv. Sobolevovy aproximace

$$\tau \sim \alpha_0 \int \exp \left(- \frac{(\nu - \nu_0(1 - v'r/c))^2}{(\nu_0 v_T/c)^2} \right) dr \sim \alpha_0 \frac{v_T}{v'}, \quad (2.42)$$

kde $v' \equiv \frac{dv(r)}{dr}$ je gradient rychlosti. Celkový tlak záření závisí na rozložení absorpčních čar podle jejich sil oscilátorů, které má přibližně mocninný průběh; počet čar silnějších než κ_L

$$N(\kappa_L) = N_0 \kappa_L^{\alpha-1}, \quad (2.43)$$

kde α je koeficient s hodnotou mezi 0,5 až 0,6. Slabé čáry se ve svém velkém počtu překrývají a způsobují tak jako pseudokontinuum tlak záření úměrný pouze toku záření, zatímco nečetné silné čáry působí tlakem úměrným gradientu rychlosti. Středováním přes uvedené rozložení čar vychází celkové zrychlení způsobené tlakem rezonančních čar³

$$g_r = k \frac{\kappa_T F_r}{c} \left(\frac{1}{v_T \kappa_T \rho} \frac{dv}{dr} \right)^\alpha, \quad (2.44)$$

³Tzv. CAK teorie (Castor, Abbot, Klein), viz [3], [2].

kde k je normovací konstanta daná N_0 . Pohybová rovnice (2.35) má pak v izotermickém přiblížení tvar

$$\left(v - \frac{v_T^2}{v}\right) \frac{dv}{dr} - \frac{2v_T^2}{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr}\right)^\alpha = 0 \quad (2.45)$$

kde

$$C = k \frac{\kappa_T L}{4\pi c} \left(\frac{4\pi}{\kappa_T v_T \dot{M}}\right)^\alpha. \quad (2.46)$$

Cvičení 5 *Odvodte a řešte pohybovou rovnici pro adiabatický sféricky symetrický hvězdný vítr.*

2.1.4 Rázové vlny

V předešlé kapitole jsme hledali stacionární řešení hydrodynamických rovnic pro urychlovaný proud hmoty, která spojitě propojují jeho popis v podzvukové a nadzvukové oblasti prostoru. V přírodě se ovšem často setkáváme se situací, kdy se makroskopické veličiny (např. hustota a rychlost plynu) mění prakticky skokově, přesněji řečeno na prostorové škále řádu střední volné dráhy jednotlivých částic. O té předpokládáme, že je podstatně menší než charakteristická délka makroskopických nehomogenit prostředí, takže k popisu prostředí je vhodné používat prostorové funkce nespojitě na jisté ploše rozhraní. Příkladem takové situace jsou tzv. rázové vlny vznikající např. při akreci materiálu padajícího nadzvukovou rychlostí na povrch hvězdy, při srážce hvězdných větrů ze dvou složek dvojhvězdy, při interakci kosmických výtrysků s mezihvězdným prostředím, při interakci slunečního větru s magnetosférami planet atd.

Diferenciální rovnice popisující časový vývoj makroskopických veličin kontinua jako je rovnice kontinuity hmoty (1.49) nebo náboje (1.74), pohybová rovnice (1.51) či (1.90), nebo rovnice energetické rovnováhy (1.61) mají tvar zákonů zachování

$$\frac{\partial \rho_X}{\partial t} + \frac{\partial J_X^i}{\partial x^i} = S_X \quad (2.47)$$

veličiny X s hustotou ρ_X , tokem J_X a hustotou zdroje S_X , nebo je lze do tohoto tvaru upravit. Ve vztažné soustavě, vůči níž se rázová vlna nepohybuje, časová derivace odpadá. Vyintegrováním těchto rovnic ve směru normály n^k k ploše diskontinuity podél limitně malého úseku dráhy z jedné její strany na druhou dostaneme tzv. Rankinovy – Hugoniotovy podmínky

$$[J_X^i n^i]_1^2 = 0, \quad (2.48)$$

v nichž první člen s časovou derivací i pravá strana vypadly v důsledku předpokládané spojitosti.

Konkrétně z rovnice kontinuity hmoty tak dostáváme podmínku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad [\rho n^i v^i]_1^2 = 0, \quad (2.49)$$

kteřá ovšem platí pouze ve vztažných soustavách, vůči nimž se plocha diskontinuity (rázová vlna) nepohybuje. Pokud by se diskontinuita pohybovala rychlostí v_d , pak musíme rychlosti $v_{1,2}$ nahradit rozdílem $v_{1,2} - v_d$ (příčemž fyzikální smysl má pouze složka v_d rovnoběžná s n). Tuto podmínku lze splnit dvěma způsoby – buď musí být $n^i v^i = 0$ a tedy hmota se na obou stranách diskontinuity pohybuje rovněž s její plochou a pak její hustoty na obou stranách jsou nezávislé, nebo rychlost má také nenulovou složku ve směru normály k ploše, a pak hustoty musí být nepřímo úměrné velikostem těchto složek tak, aby průtok hmoty byl z obou stran stejný. Právě v tomto druhém případě se jedná o rázovou vlnu, nastávat ale může i diskontinuita prvního typu.

Podobně z pohybové rovnice (1.75), jejímž speciálním případem pro neionizovaný plyn je (1.51) a která má po dosazení celkového tenzoru napětí (1.31) s izotropním tlakem $\tau^{ij} = \delta^{ij}P$ a elektrického proudu podle (1.89) tvar

$$\partial_t(\rho v^i) + \nabla_j(\rho v^i v^j + P\delta^{ij}) + \rho \nabla_i \Phi - \eta E^i - \frac{1}{4\pi} \nabla_j(B^i B^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}B^2) = 0, \quad (2.50)$$

dostáváme

$$\left[\rho v^i (n^j v^j) + P n^i + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{n^j}{2} \delta^{ij} B^2 - B^i B^j \right) \right]_1 = 0. \quad (2.51)$$

Tato rovnice udává rovnováhu celkového tlaku (tj. tlaku uspořádaného pohybu, vnitřního tlaku plynu a magnetického tlaku) z obou stran rozhraní. V případě, že rychlost je rovnoběžná s diskontinuitou a nejedná se tedy o rázovou vlnu, jsou složky tlaků uspořádaného pohybu kolmé k diskontinuitě nulové a rovnováhu musí zajišťovat vnitřní a magnetický tlak.

Ze stopy rovnice (1.53) pro kvadratické momenty Boltzmannovy rovnice můžeme odvodit rovnici kontinuity energie. Když podle (1.31) a (1.55) rozložíme druhé a třetí momenty rozdělovací funkce na části uspořádaného a vnitřního pohybu, podle (1.60) budeme předpokládat izotropní tlak a zanedbáme složky q^{ijj} odpovídající vedení tepla, pak tato rovnice bude mít tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\varepsilon v^i + P v^i + \frac{\rho v^2}{2} v^i \right) + \rho v^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta \varepsilon}{\delta t} \right)_c. \quad (2.52)$$

Veličina $\varepsilon + P$ ve druhém členu odpovídá objemové hustotě entalpie h .⁴ Rankinova – Hugoniotova podmínka zachování energie tak má tvar

$$\left[\left(h + \frac{\rho v^2}{2} \right) (v^i n^i) \right]_1 = 0. \quad (2.53)$$

Další podmínky pro nespojitosti v plazmatu vyplývají z Maxwellových rovnic (1.88)

$$\nabla B = 0 \quad \Rightarrow \quad [B^i n^i]_1^2 = 0 \quad (2.54)$$

a z rovnice (1.91) pro vývoj magnetického pole v limitě nekonečné vodivosti

$$\partial_t B = \nabla \times \left(v \times B - \frac{c}{\sigma} J \right) \quad \Rightarrow \quad [n \times (v \times B)]_1^2 = 0. \quad (2.55)$$

Vyšetřujeme nyní jednoduchý případ rázové vlny v plynu s l stupni volnosti, jehož tlak a vnitřní energie jsou dány vztahem (2.24). Jeho vlastnosti jsou popsány hustotami hmoty $\rho_{1,2}$, rychlostmi $v_{1,2}$ ve směru normály k rázové vlně a tlaky $P_{1,2}$ na obou jejích stranách. Tyto tři veličiny v nalétávajícím proudu považujeme za zadané a pro jejich hodnoty ρ_2 , v_2 a P_2 za rázovou vlnou dostáváme z podmínek (2.49), (2.51) a (2.53) soustavu rovnic

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 \quad (2.56)$$

$$P_2 + \rho_2 v_2^2 = (1 + \xi) \rho_1 v_1^2 \quad (2.57)$$

$$\alpha P_2 v_2 + \rho_2 v_2^3 = (1 + \alpha \xi) \rho_1 v_1^3, \quad (2.58)$$

⁴Entalpie je termodynamický potenciál $H(S, P, N) = E(S, V, N) + PV$ systému, tj. Legendreova transformace vnitřní energie $E = \int (TdS - PdV + \mu dN)$ ve sdružených proměnných P a V . Podobně Helmholtzova volná energie $F(T, V, N) = E - TS$ a Gibbsova volná energie $G(T, P, N) = E - TS + PV$.

kde jsme označili

$$\alpha \equiv l + 2 \quad \text{a} \quad \xi \equiv \frac{P_1}{\rho_1 v_1^2}. \quad (2.59)$$

Z rov. (2.56) můžeme vypočítat hustotu ρ_2 , z (2.57) tlak ρ_2 a po dosazení do (2.58) dostaneme kvadratickou rovnici

$$(\alpha - 1)v_2^2 - \alpha(1 + \xi)v_1v_2 + (\alpha\xi + 1)v_1^2 = 0 \quad (2.60)$$

pro v_2 . Ta má dvě řešení, z nichž jedno ($v_2 = v_1$) je triviální a odpovídá nerušenému toku hmoty přes kteroukoliv plochu. Rozkladem

$$[(\alpha - 1)v_2 - (1 + \alpha\xi)v_1][v_2 - v_1] = 0 \quad (2.61)$$

na kořenové činitele nalezneme řešení odpovídající rázové vlně

$$v_2 = \frac{1 + \alpha\xi}{\alpha - 1} v_1. \quad (2.62)$$

Pro plyn s l stupni volnosti na každou částici a zanedbatelným počátečním tlakem ($\xi = 0$) tak vzhledem k (2.59) klesne rychlost plynu za rázovou vlnou na $1/(\alpha - 1) = 1/(l + 1)$ původní hodnoty, tj. na čtvrtinu pro částice, které mají pouze tři kinetické stupně volnosti. Z rovnice (2.56) je zřejmé, že hustota ρ_2 se zvětší v opačném poměru než je zmenšení rychlosti.

Z rovnice (2.62) vyplývá, že $v_2 < v_1$, jestliže $v_1^2 > \frac{\kappa P_1}{\rho_1} \equiv c_1^2$. Z rozboru adiabatické vlnové poruchy rovnic (2.20) a (2.21) se můžeme přesvědčit, že c_1 je rychlost zvuku v plynu s počátečními podmínkami ρ_1 , P_1 (poměr $M_1 \equiv v_1/c_1$ je tedy Machovo číslo, které musí být > 1).⁵ Právě nadzvukovost proudu plynu nalétávajícího na rázovou vlnu brání tomu, aby se v něm proti proudu šířila informace o přítomnosti rázové vlny a docházelo tak k postupnému spojitému brždění a zahušťování plynu. Z rovnic (2.56) a (2.57) můžeme dále odvodit, že pro rychlost zvuku c_2 za rázovou vlnou platí

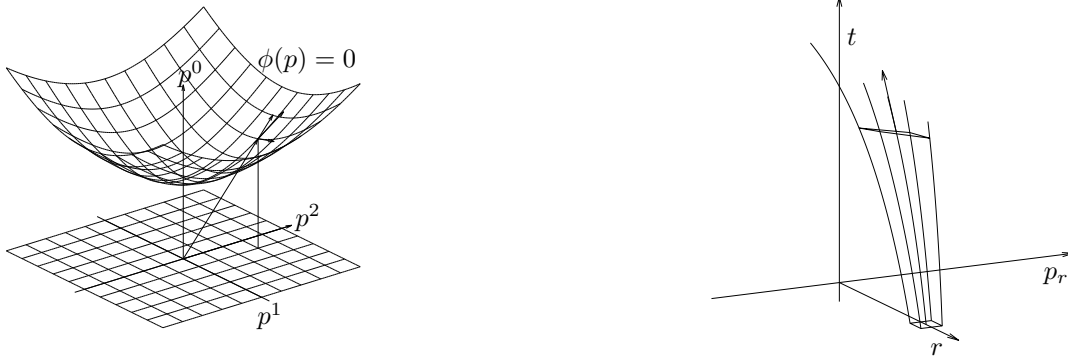
$$\frac{c_2^2}{v_2^2} = \frac{\kappa P_2}{\rho_2 v_2^2} = \frac{l + 2}{l} \frac{l - \xi}{1 + (l + 2)\xi}. \quad (2.63)$$

Tento poměr je větší než 1 dokud $\kappa\xi < 1$, což znamená, že proud plynu dopadající nadzvukovou rychlostí se po zpomalení a ohrání rázovou vlnou pohybuje dál podzvukovou rychlostí.

2.2 Relativistická kinetická teorie

Zvolený pozorovatel může kinetickou teorii v podobě, ve které jsme ji formulovali v kapitole 1.1, aplikovat z pohledu své vztahné soustavy i na plyn složený z relativistických částic (viz např. odstavec 2.1.1). Jestliže se však budeme zabývat vztahy mezi veličinami naměřenými různými inerciálními pozorovateli, pak předpoklady galileovské grupy transformací (tj. absolutní čas, invariančnost prostorového i hybnostního objemu a pouhé posunutí v prostoru hybností, které jsme používali např. při vyjádření (1.31) tenzoru napětí vůči vztahné soustavě pomocí jeho složek ve vlastní soustavě plynu) budou omezovat použitelnost klasické teorie na případ nerelativistického plynu a nerelativistických rychlostí vztahných soustav. Chceme-li vybudovat lorentzovskey invariantní kinetickou teorii použitelnou v rámci speciální a tím spíše i obecné teorie relativity, musíme revidovat zavedení základních pojmů počínaje fázovým prostorem. S jejich použitím pak můžeme odvodit dynamické vztahy pro rozdělovací funkci a jejich důsledky jako jsou (zářivá gravito-) magnetohydrodynamika.

⁵Předpokládáme poruchu $\delta\rho$, δv , $\delta P \sim \exp(ik(x - ct))$. Podle (2.26) $\delta P = \kappa P \delta\rho/\rho$, takže poruchové rovnice $\partial_t \delta\rho + \rho \partial_x \delta v = ik[-c\delta\rho + \rho\delta v] = 0$ a $\rho \partial_t \delta v + \partial \delta P = ik[\kappa P/\rho \delta\rho - c\rho\delta v] = 0$ mají nenulové řešení právě když $c^2\rho - \kappa P = 0$.



Obrázek 2.2: a) Souřadnice na hmotové slupce. b) Fázové trajektorie částic padajících radiálně na černou díru.

2.2.1 Fázový prostor

Nechť V je prostoročas s pseudo-riemannovskou metrikou g (se signaturou $-, +, +, +$). Metrika g definuje na V lorentzovsky invariantní čtyř-objem

$$\eta \equiv d^4V = \sqrt{-|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dt \wedge d^3V, \quad (2.64)$$

kde (x^0, x^1, x^2, x^3) jsou souřadnice v libovolné mapě a $|g|$ je determinant matice kovariantních složek g (takže v libovolné ortonormální bázi dx^μ je $|g| = -1$). Tří-objem

$$\eta_U \equiv d^3V = \langle d^4V, U \rangle \quad (2.65)$$

měřený pozorovatelem se čtyř-rychlostí U a vlastním časem t se transformuje při přechodu k čárkovanému pozorovateli

$$d^3V' = \frac{dt}{dt'} d^3V = \frac{\eta_U}{U^0} . \quad (2.66)$$

Tří-objem tedy lorentzovsky kontrahuje v opačném poměru (daném $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$) než ve kterém časový interval dilataje, zatímco prostoročasový čtyř-objem zůstává lorentzovsky invariantní.

Na tečném prostoru T_x hybností (p^0, p^1, p^2, p^3) částic v dané události x definuje metrika g čtyř-objem hybností

$$\pi \equiv d^4P = \sqrt{-|g|} dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3. \quad (2.67)$$

Ten je opět lorentzovsky invariantní, i když jeho projekce do U a kolmé nadroviny (tj. do časové a prostorových složek z hlediska zvoleného pozorovatele) nejsou invariantní. Pokud se zabýváme pouze částicemi s danou klidovou hmotností m , jejichž čtyř-hybnosti splňují relaci

$$0 = \phi(p) = p^2 + m^2, \quad (2.68)$$

popřípadě jinou, např. disperzní relaci, pak se prostor hybností redukuje na tzv. hmotovou slupku T_ϕ , tj. třídídimenzionální podvarietu variety T_x , ve které můžeme jako souřadnice použít např. prostorové (z hlediska zvoleného pozorovatele) složky p a časovou složku vyjádřit jako jejich funkci $p^0 = p^0(p^i)$ (zpravidla se omezuje na $p^0 > 0$, viz obr. 2.2a). Lorentzovsky invariantní tří-objem

π_ϕ na T_ϕ (indukovaný metrikou g) dostaneme zúžením d^4P s jednotkovým vektorem kolmým k T_ϕ , takže

$$d^4P = \frac{d\phi}{|d\phi|} \wedge \pi_\phi. \quad (2.69)$$

V konkrétním tvaru rovnice (2.68)

$$d\phi = 2p_\kappa dp^\kappa \quad \Rightarrow \quad |d\phi|^2 = -4p^2 = 4m^2, \quad (2.70)$$

takže

$$\sqrt{-|g|} dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3 = \frac{1}{m} p_0 dp^0 \wedge \pi_\phi, \quad (2.71)$$

odkud vychází

$$\pi_\phi = \sqrt{-|g|} \frac{m}{p_0} dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3. \quad (2.72)$$

Relativistickým zobecněním fázového prostoru je tečný bundle $M = \{(x, p) | x \in V, p \in T_x\}$ (viz definice 7 na str. 58) s metrikou

$$G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

a osmi-objemem

$$\begin{aligned} \Omega &= d^4V \wedge d^4P = \\ &= -|g| dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3 = \\ &= -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dp_0 \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Pro částice splňující relaci (2.68) je fázovým prostorem hmotová slupka M_ϕ jako sedmidimenzionální podvarieta M s invariantní mírou

$$\Omega_\phi = d^4V \wedge \pi_\phi \quad (2.75)$$

2.2.2 Liouvilleův teorém a Boltzmannova rovnice

Ve fázovém prostoru M definují pohybové rovnice jedné částice

$$\frac{d\xi}{dw} = \Xi(\xi), \quad (2.76)$$

kde $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3, p^0, p^1, p^2, p^3)$, jednoparametrickou grupu pohybových transformací, tj. fázových trajektorií parametrizovaných afinním parametrem w . Fázový objem Ω je vůči tomuto pohybu invariantní, pokud Liouvilleův operátor $L = \frac{d}{dw}$ splňuje tzv. Liouvilleův teorém

$$\operatorname{div} L = 0. \quad (2.77)$$

Pak totiž (podle (A.87), (A.86) a (A.60))

$$\frac{d}{dw} \int_D \Omega = \int_D \mathcal{L}_L \Omega = \int_D d\langle L, \Omega \rangle = \int_D (\operatorname{div} L) \Omega = 0, \quad (2.78)$$

kde $D = D(w) \subset M$ je libovolná oblast (přičemž míra Ω je dána metrikou a divergence odpovídající metrickou konexí). V tomto případě je míra

$$\omega = \langle L, \Omega \rangle \quad (2.79)$$

invariantní mírou udávající hustotu fázových trajektorií protínajících libovolnou sedmidimenzionální nadplochu (např. vlastní fázový prostor $\Gamma = \{(x, p) \in M | (U \frac{\partial}{\partial x}) = 0\}$ pozorovatele nebo soustavy pozorovatelů se čtyřrychlostí U), neboť

$$0 = \int_D d\langle L\Omega \rangle = \int_{\partial D} \langle L\Omega \rangle = \int_{\partial D} \omega = \int_{\Gamma} \omega - \int_{\Gamma'} \omega. \quad (2.80)$$

Potom můžeme také definovat invariantní rozdělovací funkci f na M jako hustotu fázových trajektorií obsazených částicemi tak, že počet částic $N(\Gamma)$ naměřených pozorovatelem v jeho fázovém objemu $\int_{\Gamma} \eta_U \wedge d^4P$ je

$$N(\Gamma) = \int_{\Gamma} f\omega. \quad (2.81)$$

Pohybová rovnice pro vývoj f v důsledku pohybu (2.76) a popřípadě i srážek je tzv. Boltzmannova rovnice

$$L(f) = \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c, \quad (2.82)$$

kde srážkový člen na pravé straně udává lorentzovsky invariantní fázovou hustotu částic vznikajících minus zanikajících v daném elementu fázového objemu,

$$\int_D \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c \Omega = N(\Gamma) - N(\Gamma') = \int_{\partial D} f\omega = \int_D d(f\langle L\Omega \rangle) = \int_D L(f)\Omega. \quad (2.83)$$

Srážkový člen $\left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c$ může být opět vyjádřen jako multilineární funkcionál f integrací přes hybnosti počátečních a koncových stavů ostatních částic účastnících se srážky.

Pohyb (2.76) splňuje Liouvilleův teorém (2.77) pokud jde o pohyb hamiltonovský, tj.

$$\begin{aligned} L_{x^t} &\equiv \frac{dx^t}{dw} = \frac{\partial H(x^\kappa, p_\lambda)}{\partial p_t} \\ L_{p_t} &\equiv \frac{dp_t}{dw} = -\frac{\partial H(x^\kappa, p_\lambda)}{\partial x^t}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

neboť pak je

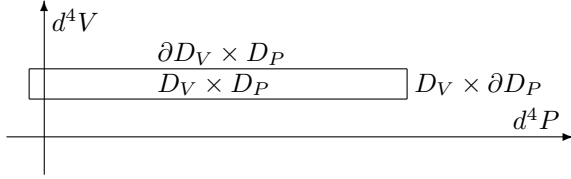
$$\text{div}L = \Xi_{,I}^I = \frac{\partial}{\partial x^t} L_{x^t} + \frac{\partial}{\partial p_t} L_{p_t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^t \partial p_t} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_t \partial x^t} = 0. \quad (2.85)$$

Liouvilleův teorém je tedy splněn v důležitých případech geodetického pohybu v obecné teorii relativity nebo pro pohyb nabitých částic v elektromagnetickém poli.

2.2.3 Makroskopické veličiny a jejich dynamické vztahy

Podobně jako v nerelativistické kinetické teorii, určuje i nyní rozdělovací funkce f hodnoty lokálních i globálních makroskopických veličin charakterizujících vlastnosti celého souboru částic popsaného funkcí f . Analogicky zavedení hustoty částic, hustoty hybnosti a tenzoru napětí v odstavci 1.1.1 nebo 2.1.1, mohou být prostorčasové hustoty q různých tenzorových veličin Q typu T_q^p dány jako součet příspěvků od všech obsazených hybnostních stavů v příslušné události, tj. integrálem příslušné veličiny Q středované s vahou f přes d^4P , resp. přes hmotovou slupku π_ϕ

$$q = \int Q f d^4P. \quad (2.86)$$



Obrázek 2.3: Oblast integrace

Některé veličiny jako např. entropie zavedená v odstavci 1.3.1 mohou být dány i nelineární závislostí na rozdělovací funkci f . Z Boltzmannovy rovnice (2.82) pak pro tyto veličiny vyplývají zákony zachování, resp. jiné dynamické vztahy.

Vynásobme rovnici (2.82) například skalární funkcí $Q(f, x, p)$ na fázovém prostoru, která může být závislá i na rozdělovací funkci f a implicitně i na některých parametrech popisovaných částic (např. na jejich nábojích různého typu), a integrujme ji přes oblast fázového prostoru $D = D_V \times D_P$, která je direktním součinem (libovolně malé) oblasti D_V prostoročasu a oblasti D_P na prostoru 4-hybností (poloměr této oblasti na tečném fibru půjde naopak limitně do nekonečna). Analogicky rovnici (2.83) platí

$$\int_D Q(f, x, p) \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c \Omega = \int_D Q(f, x, p) L(f) \Omega = \int_D L(fQ) \Omega - \int_D f L(Q) \Omega . \quad (2.87)$$

Protože povrch oblasti D se skládá ze dvou částí (viz obr. 2.3),

$$\partial D = (\partial D_V \times D_P) \cup (D_V \times \partial D_P) , \quad (2.88)$$

můžeme první z integrálů upravit

$$\begin{aligned} \int_D L(fQ(f, x, p)) \Omega &= \int_D d(fQ \langle L \Omega \rangle) = \int_{\partial D} fQ \langle L \Omega \rangle = \\ &= \int_{\partial D_V} \int_{D_P} fQ \langle L \cdot d^4 V \rangle d^4 P + \int_{D_V} \int_{\partial D_P} fQ \langle L \cdot d^4 P \rangle d^4 V . \end{aligned} \quad (2.89)$$

Druhý člen na pravé straně vymizí, jestliže rozdělovací funkce f klesá k velkým hodnotám složek hybnosti mnohem rychleji než roste Q (i v případě závislosti Q na f) a velikost ∂D_P . Zavedeme-li prostoročasový vektor J hustoty 4-proudu veličiny Q tak, aby⁶

$$\langle J \cdot d^4 V \rangle = \int_{D_P} fQ \langle L \cdot d^4 V \rangle d^4 P , \quad (2.90)$$

pak dostáváme

$$\int_D L(fQ) d^4 V \wedge d^4 P = \int_{\partial D_V} \langle J \cdot d^4 V \rangle = \int_{D_V} d \langle J \cdot d^4 V \rangle = \int_{D_V} (\text{div} J) d^4 V . \quad (2.91)$$

Protože rov. (2.87) má platit pro libovolnou oblast D_V , musí v každé události platit rovnice kontinuity toku J i v diferenciálním tvaru

$$(\text{div} J) - \int_{D_P} f L(Q) d^4 P = \int_{D_P} Q(f, x, p) \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c d^4 P . \quad (2.92)$$

⁶Prostoročasová část $L_{x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$ vektoru L na tečném bundlu je přitom obecně funkcí hybnosti p .

Toto odvození rovnice kontinuity můžeme pro hamiltonovský pohyb zapsat také v souřadnicovém tvaru. Boltzmannova rovnice (2.82) vyjádřená pomocí Poissonových závorek má tvar

$$L(f) \equiv \frac{d}{dw} f = [f, H] \equiv \frac{\partial f}{\partial x^t} \frac{\partial H}{\partial p_t} - \frac{\partial f}{\partial p_t} \frac{\partial H}{\partial x^t} = \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c . \quad (2.93)$$

Vektor toku J lze definovat vztahem

$$J^\iota \equiv \int Q \frac{dx^\iota}{dw} f d^4 P = \int Q \frac{\partial H}{\partial p_t} f (-|g|)^{-\frac{1}{2}} \prod_{\kappa=0}^3 dp_\kappa . \quad (2.94)$$

Jeho kovariantní (čtyř-)divergence $J^\iota_{;\iota}$ je tedy dána vztahem

$$\begin{aligned} \sqrt{-|g|} J^\iota_{;\iota} &= (\sqrt{-|g|} J^\iota)_{,\iota} = \int Q \frac{\partial f}{\partial x^t} \frac{\partial H}{\partial p_t} \prod dp_\kappa + \int \frac{\partial}{\partial x^t} (Q \frac{\partial H}{\partial p_t}) f \prod dp_\kappa = \\ &= \int Q \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c \prod dp_\kappa + \int Q \frac{\partial f}{\partial p_t} \frac{\partial H}{\partial x^t} \prod dp_\kappa + \int \frac{\partial}{\partial x^t} (Q \frac{\partial H}{\partial p_t}) f \prod dp_\kappa = \\ &= \int Q \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c \prod dp_\kappa - \int \frac{\partial}{\partial p_t} (Q \frac{\partial H}{\partial x^t}) f \prod dp_\kappa + \int \frac{\partial}{\partial x^t} (Q \frac{\partial H}{\partial p_t}) f \prod dp_\kappa = \\ &= \sqrt{-|g|} \int Q \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c d^4 P + \sqrt{-|g|} \int [Q, H] f d^4 P , \end{aligned} \quad (2.95)$$

tj.

$$J^\iota_{;\iota} - \int [Q, H] f d^4 P = \int Q \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c d^4 P . \quad (2.96)$$

Speciálně, když zvolíme $Q \equiv 1$, pak $[Q, H] = 0$ a čtyř-tok hustoty částic

$$J^\iota = \int \frac{dx^\iota}{dw} f d^4 P \quad (2.97)$$

splňuje jednoduchou rovnici kontinuity

$$J^\iota_{;\iota} = \int \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c d^4 P , \quad (2.98)$$

kde srážkový člen na pravé straně udává časoprostorovou hustotu vzniku nebo zániku částic příslušného druhu při srážkách (a v mnoha případech lze tento člen brát jako nulový).

Další moment Boltzmannovy rovnice dává pohybovou rovnici, tj. rovnici zachování hybnosti. Hybnost p_κ není skalární veličina, můžeme z ní však skalární veličinu zkonstruovat zúžením s libovolným vektorem v^κ . Zvolíme-li tedy veličinu $Q = v^\kappa p_\kappa$, pak její čtyř-tok \mathcal{J} má podle rov. (2.94) tvar

$$\mathcal{J}^\iota = v^\kappa \int p_\kappa \frac{dx^\iota}{dw} f d^4 P = v^\kappa T_\kappa{}^\iota , \quad (2.99)$$

kde

$$T_\kappa{}^\iota \equiv \int p_\kappa \frac{dx^\iota}{dw} f d^4 P \quad (2.100)$$

je kanonický tenzor energie-hybnosti soustavy částic. Poissonova závorka

$$[Q, H] = p_\kappa v^\kappa_{,\iota} \frac{\partial H}{\partial p_t} - v^\kappa \frac{\partial H}{\partial x^\kappa} , \quad (2.101)$$

takže rovnice (2.96) má tvar

$$(v^\kappa T_{\kappa}{}^\iota)_{; \iota} - v^\kappa{}_{, \iota} T_{\kappa}{}^\iota + v^\kappa \int \frac{\partial H}{\partial x^\kappa} f d^4 P = v^\kappa \int p_\kappa \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c d^4 P, \quad (2.102)$$

který musí být splněn pro všechna vektorová pole v . Tenzor energie-hybnosti proto musí splňovat rovnici kontinuity hybnosti

$$T_{\kappa}{}^\iota{}_{; \iota} + \omega^\lambda{}_{\kappa \iota} T_{\lambda}{}^\iota + \int \frac{\partial H}{\partial x^\kappa} f d^4 P = \int p_\kappa \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c d^4 P, \quad (2.103)$$

kde $\omega^\lambda{}_{\kappa \iota}$ jsou 1-formy konexe – srov. (A.47). Rovnice (2.103) je pohybová rovnice kontinua.

Pro soustavu nabitých částic v gravitačním a elektromagnetickém poli je jednočásticový Hamiltonián

$$H = \frac{1}{2} g^{\iota \lambda} (p_\iota - e A_\iota) (p_\lambda - e A_\lambda), \quad (2.104)$$

kde e je náboj částice a $A(x)$ je čtyřpotenciál elektromagnetického pole. Pohybové rovnice částice (2.84) tedy mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{dx^\iota}{dw} &= \frac{\partial H}{\partial p_\iota} = p^\iota - e A^\iota, \\ \frac{dp_\iota}{dw} &= -\frac{\partial H}{\partial x^\iota} = -\frac{1}{2} g^{\kappa \lambda}{}_{, \iota} (p_\kappa - e A_\kappa) (p_\lambda - e A_\lambda) + e (p^\kappa - e A^\kappa) A_{\kappa, \iota}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

čtyř-tok hustoty splňující rovnici kontinuity (2.98) je dán vztahem

$$J^\iota = \int \frac{\partial H}{\partial p_\iota} f d^4 P = \int (p^\iota - e A^\iota) f d^4 P \quad (2.106)$$

a kanonický tenzor energie-hybnosti

$$T_{\kappa}{}^\iota = \int p_\kappa \frac{\partial H}{\partial p_\iota} f d^4 P = \int p_\kappa (p^\iota - e A^\iota) f d^4 P. \quad (2.107)$$

Pro nulový náboj nebo elektromagnetické pole je tenzor $T^{\kappa \iota}$ symetrický. V tom případě se druhý a třetí člen na levé straně pohybové rovnice (2.103) vyruší a čtyř-divergence tenzoru energie-hybnosti soustavy částic popsané rozdělovací funkcí f je dána pouze srážkovým členem na pravé straně. Pro nabitě částice v elektromagnetickém poli má kanonický tenzor energie-hybnosti antisymetrickou část

$$T^{\iota \kappa} - T^{\kappa \iota} = e (A^\iota J^\kappa - A^\kappa J^\iota), \quad (2.108)$$

takže druhý a třetí člen na levé straně rov. (2.103) se složí na člen vyjadřující v pohybové rovnici

$$T_{\kappa}{}^\iota{}_{; \iota} - e J^\iota A_{\iota; \kappa} = \int p_\kappa \left(\frac{\delta f}{\delta w} \right)_c d^4 P \quad (2.109)$$

hustotu elektromagnetické síly působící na nabitě kontinuum.

2.2.4 Lokálně dynamicky symetrické rozdělení

V kapitole 1.3 jsme odvodili, že ve vlastním klidovém systému plynu je v termodynamické rovnováze rozdělovací funkce částic funkcí pouze energie částic $E = E(p)$ měřené v tomto systému (a souřadnic x). Jestliže nyní víme, že f je lorentzovsky invariantní, pak to znamená, že v obecné soustavě,

vůči níž má lokální vlastní klidová soustava plynu 4-rychlost $U^\iota = U^\iota(x)$, musí být rovnovážná rozdělovací funkce závislá na 4-hybnosti pouze prostřednictvím součinu $p_\iota U^\iota$. V termodynamické rovnováze musí mít f navíc některý z konkrétních tvarů (1.139) nebo (1.140) podle kvantové povahy popisovaných částic. Jestliže však budeme mít jakékoliv rozdělení tvaru

$$f = f(x, (pU(x))) , \quad (2.110)$$

které nazveme lokálně dynamicky symetrické (tedy např. bude energetické rozložení odlišné od rovnovážného, bude však stále izotropní), pak z Boltzmannovy rovnice pro dynamiku tohoto plynu vyplývají silná omezení.

Především ze samotné podmínky $UU = -1$ vyplývá

$$U_\iota U^{\iota;\kappa} = 0 , \quad (2.111)$$

odkud pro 4-zrychlení

$$a^\iota = U^\iota_{;\kappa} U^\kappa \quad (2.112)$$

lokálních pozorovatelů v klidu vůči plynu dostáváme podmínku kolmosti na 4-rychlost. Zavedeme-li projektor do vlastního prostoru těchto pozorovatelů⁷

$$P^{\iota\kappa} = U^\iota U^\kappa + g^{\iota\kappa} , \quad (2.113)$$

můžeme s jeho pomocí každý 4-vektor X rozložit na časovou a prostorovou složku

$$X^\iota = -U^\iota(U_\kappa X^\kappa) + P^\iota_\kappa X^\kappa \quad (2.114)$$

rovnoběžnou a kolmou k U . Podobně každý tenzor X můžeme rozložit na časovou, smíšenou (prostorově-časovou) a prostorovou složku

$$X^{\iota\kappa} = U^\iota U^\kappa (U_\lambda X^{\lambda\mu} U_\mu) - (P^\iota_\lambda U^\kappa U_\mu X^{\lambda\mu} + U^\iota U_\lambda P^\kappa_\mu X^{\lambda\mu}) + P^\iota_\lambda P^\kappa_\mu X^{\lambda\mu} . \quad (2.115)$$

Pro kovariantní derivaci samotného U se tento výraz vzhledem k (2.111) zjednoduší na

$$U^{\iota;\kappa} = -P^\iota_\lambda U^\kappa U^{\lambda;\mu} U_\mu + P^\iota_\lambda P^\kappa_\mu U^{\lambda;\mu} = -a^\iota U^\kappa + U^{\iota;\lambda} P^\kappa_\lambda \quad (2.116)$$

$$= -a^\iota U^\kappa + \omega^{\iota\kappa} + \sigma^{\iota\kappa} + \frac{1}{3}\theta P^{\iota\kappa} , \quad (2.117)$$

kde antisymetrický tenzor rotace (vorticity)

$$\omega^{\iota\kappa} = U^{[\iota;\lambda} P^{\kappa]}_\lambda = U^{[\iota;\kappa]} + a^{[\iota} U^{\kappa]} , \quad (2.118)$$

a symetrický tenzor smyku (shear)

$$\sigma^{\iota\kappa} = U^{(\iota;\lambda} P^{\kappa)}_\lambda - \frac{1}{3}U^\lambda_{;\lambda} P^{\iota\kappa} = U^{(\iota;\kappa)} + a^{(\iota} U^{\kappa)} - \frac{1}{3}\theta P^{\iota\kappa} , \quad (2.119)$$

jsou prostorové tenzory ve vlastním klidovém systému plynu a

$$\theta = U^\iota_{;\iota} \quad (2.120)$$

⁷Dosazením se lze přesvědčit že P je skutečně projektor

$$P^\iota_\kappa P^\kappa_\lambda = P^\iota_\lambda$$

a že jeho stopa $P^\iota_\iota = 3$.

je skalár expanze.

Obecný mocninný moment rozdělovací funkce je symetrický tenzor. V případě lokálně dynamicky symetrického rozdělení, jehož jediným význačným směrem je 4-rychlost U , musí být každý moment zkonstruován ze symetrizovaných tenzorových součinů U a g . Např. tenzor energie-hybnosti musí mít tvar lineární kombinace

$$T^{\mu\kappa} \sim \langle p^\mu p^\kappa f \rangle = A(x)U^\mu U^\kappa + B(x)g^{\mu\kappa} \quad (2.121)$$

a tenzor třetího řádu

$$Q^{\mu\kappa\lambda} \sim \langle p^\mu p^\kappa p^\lambda f \rangle = W(x)U^\mu U^\kappa U^\lambda + 3V(x)U^{(\mu} g^{\kappa\lambda)}. \quad (2.122)$$

Z momentů Boltzmannovy rovnice pro plyn v metrickém poli vyplývá, že kovariantní 4-divergence se musí rovnat momentu srážkového členu. Jestliže rozdělovací funkce je dynamicky symetrická a srážky mezi částicemi tuto symetrii nenaruší (např. interakcí s jiným druhem částic rozdělených nesymetricky), pak i srážkový člen musí být lokálně dynamicky symetrický a jeho momenty musí být také zkonstruovány z U a g . Konkrétně pro druhý moment Boltzmannovy rovnice tak dostáváme vztah

$$Q^{\mu\kappa\lambda}_{;\iota} = \langle p^\kappa p^\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta \tau} \right)_c \rangle \sim X(x)U^\kappa U^\lambda + Y(x)g^{\kappa\lambda}, \quad (2.123)$$

ze kterého po dosazení (2.122) vyplývá diferenciální rovnice pro U

$$(\dot{W} + W\theta)U^\kappa U^\lambda + 2W a^{(\kappa} U^{\lambda)} + (\dot{V} + V\theta)g^{\kappa\lambda} + 2V^{(\kappa} U^{\lambda)} + 2V U^{(\kappa; \lambda)} = X(x)U^\kappa U^\lambda + Y(x)g^{\kappa\lambda}. \quad (2.124)$$

Rozložením této rovnice do časové, smíšené a prostorové složky, a dále rozložením prostorové složky na její část s nulovou stopou a na stopu, dostaneme vztahy

$$\dot{W} + W\theta - 3\dot{V} - V\theta = X - Y \quad (2.125)$$

$$(V - W)a^\kappa = P^\kappa_{\iota} V^{\iota} \quad (2.126)$$

$$\sigma = 0 \quad (2.127)$$

$$\dot{V} + \frac{5}{3}V\theta = Y. \quad (2.128)$$

Z rovnice (2.126) tedy vyplývá, že nutnou podmínkou k tomu, aby plyn mohl být lokálně dynamicky symetrický (a speciálně tedy i v termodynamické rovnováze), je, že jeho zrychlení musí být úměrné prostorové projekci gradientu jistého skaláru. Podobně podle (2.127) je nutnou podmínkou také nulovost smyku. Lze dokázat, že další nutnou podmínkou je, že plyn nemůže být současně rotující a expandující, tj. $\theta\omega = 0$.

2.3 Numerické metody dynamiky plynů

K řešení konkrétních úloh dynamiky plynů např. v astrofyzice musíme často užívat numerického modelování. Existuje řada různých osvědčených metod, které lze k tomuto účelu zvolit, a lze poměrně snadno vytvořit další, více či méně odlišné. Proto se zde nebudeme snažit o systematický přehled a výklad všech metod a raději si na několika vybraných metodách ukážeme jejich vlastnosti a problémy spojené s jejich užíváním. V zásadě však numerické metody vycházejí z modelování plynu buď kontinuem, popsaným parciálními diferenciálními rovnicemi, nebo velkým počtem částic splňujících pohybové rovnice (existuje ovšem i řada metod smíšených). O obou těchto přístupech existuje velké množství literatury (např. [13] pro síťové metody).

V případě spojitého popisu prostředí můžeme proměnné veličiny numericky reprezentovat jejich hodnotami v jisté prostorové síti, nebo rozvojem do vhodného systému funkcí. Druhý přístup bývá výhodný když vychází z jisté (alespoň přibližné) symetrie úlohy a snižuje tak její dimenzi (za cenu většího počtu proměnných, který je však stále menší než počet uzlů sítě potřebných k reprezentaci potlačené dimenze). Parciální diferenciální rovnice, ke kterým úloha v obou případech vede (pokud rozvojem nepotlačíme např. všechny prostorové dimenze a nedostaneme tak soustavu obyčejných diferenciálních rovnic), bývá zvykem klasifikovat jako eliptické (např. Poissonova rovnice $(\partial_x^2 + \partial_y^2)F(x, y) = Q(x, y)$), parabolické (např. rovnice difuze $(\partial_t + C\partial_x^2)F(t, x) = 0$) a hyperbolické (např. vlnová rovnice $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)F(t, x) = 0$). Z numerického hlediska je mezi nimi rozdíl v tom, že první dává ‘problém okrajových podmínek’ vyžadující self-konzistentní statické řešení ve všech proměnných, zatím co druhé dva typy dávají tzv. ‘Cauchyho problém’ (‘počátečních podmínek’), umožňující postupnou integraci časového vývoje. Právě tímto případem se budeme v následujícím zabývat.

2.3.1 Metody sítí

Hydrodynamické rovnice a další rovnice, které s nimi mohou být případně svázány (např. Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole nebo Poissonova rovnice pro newtonovský gravitační potenciál), tvoří zpravidla soustavu parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Pokud jsou totiž některé diferenciální rovnice vyššího řádu, lze je vhodnými substitucemi a doplněním definičních rovnic převést na rovnice prvního řádu pro větší počet proměnných (např. Poissonovu rovnici pro potenciál označením gradientů potenciálu jako intenzit pole).

Stabilitu řešení takové soustavy rovnic samotné i různých diferenčních schémat užitých k jejímu numerickému řešení můžeme vyšetřovat pomocí tzv. von Neumannovy analýzy lokální stability, tj. studiem chování amplitud jednotlivých fourierovských modů poruch řešení. Předpokládejme, že rovnice mohou být zapsány v eulerovských souřadnicích ve tvaru

$$\partial_t u + \partial_x F(u) + G(u) = 0. \quad (2.129)$$

Proměnná u je obecně vícesložková množina – ‘vektor’ (ve smyslu pole v programovacích jazycích, nikoliv z hlediska diferenciální geometrie) stavových veličin, $F(u)$ představuje toky těchto veličin a $G(u)$ zdrojové členy. Pokud by soustava nebyla lineární v u , můžeme ji napřed linearizovat do tvaru

$$\partial_t u = L(u) = Au + B\partial_x u, \quad (2.130)$$

kde L je lineární diferenciální operátor, tj. A a B jsou matice.⁸ Potom pro Fourierovu transformaci \tilde{u} (kde $u(t, x) = \int \tilde{u}(t, k)e^{ikx} dk$) dostáváme rovnici

$$\partial_t \tilde{u} = A\tilde{u} + ikB\tilde{u}, \quad (2.131)$$

která má formální řešení

$$\tilde{u}(t, k) = \exp(At + ikBt)\tilde{u}(0, k). \quad (2.132)$$

Rozložíme-li tedy vektor u do vlastních vektorů matice $A + ikB$, pak jeho složky odpovídající vlastním hodnotám se zápornou reálnou částí budou exponenciálně tlumené a s kladnou exponenciálně porostou.

Nahradíme-li soustavu diferenciálních rovnic (2.130) diferenčními rovnicemi

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-m}^{+m} C_l u_{j+l}^n \quad (2.133)$$

⁸Pokud soustava lineárních rovnic (2.130) obsahuje na pravé straně absolutní člen, vyšetřujeme napřed chování homogenní soustavy.

a $u_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x)$ rozložíme v x do Fourierovy řady $u_j^n = \sum_k \tilde{u}_k^n e^{ikj\Delta x}$, pak v analogii s (2.132) dostaneme

$$\tilde{u}_k^n = \left(\sum_{l=-m}^{+m} C_l e^{ikl\Delta x} \right)^n \tilde{u}_k^0. \quad (2.134)$$

Každý mod tedy opět bude klesat nebo poroste podle velikosti absolutní hodnoty příslušné vlastní hodnoty matice $\sum_{l=-m}^{+m} C_l e^{ikl\Delta x}$.

Jako příklad vyšetřujeme nejprve soustavu rovnic kontinuity (1.49) a pohybové rovnice (1.51) s nulovými srážkovými členy v jedné prostorové dimenzi,

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix}, \quad F(u) = \begin{pmatrix} \pi \\ T \end{pmatrix}, \quad G(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\Phi' \end{pmatrix}, \quad (2.135)$$

kterou uzavřeme algebraickou rovnicí (1.31)

$$T = \frac{\pi^2}{\rho} + P(\rho) \quad (2.136)$$

pro celkový tenzor napětí T při známé stavové rovnici $\tau^{ij} = P(\rho)\delta^{ij}$ pro tlak P ve vlastní soustavě kontinua. Rovnice (2.130) má tedy tvar

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Phi' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix}, \quad (2.137)$$

kde $v = \frac{\pi}{\rho}$ je rychlost proudění kontinua a $c^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho}$ je čtverec rychlosti zvuku (při stavové rovnici $P(\rho)$) v klidové soustavě kontinua. Po Fourierově transformaci tedy bude mít matice na pravé straně rovnice (2.131) tvar

$$A + ikB = - \begin{pmatrix} 0 & ik \\ ik(c^2 - v^2) + \Phi' & 2ikv \end{pmatrix}. \quad (2.138)$$

Vlastní hodnoty této matice jsou

$$\lambda_{\pm} = -ik \left(v \pm c \sqrt{1 - i \frac{\Phi'}{kc^2}} \right), \quad (2.139)$$

a vlastní vektory

$$u_{\pm}(k) = - \begin{pmatrix} ik \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (2.140)$$

Řešení (2.132) tak bude představovat zvukové vlny s vlnovým vektorem k a frekvencemi $\Im(\lambda)$, to znamená postupující rychlostmi $v \pm c$ (v je rychlost unášení prouděním a c je rychlost zvuku ve vlastní soustavě kontinua). Pokud je $\Phi' \neq 0$, pak amplituda jedné z těchto vln s časem exponenciálně roste a druhá klesá (podle znaménka $\Re(\lambda)$).

Toto chování jednotlivých fourierovských modů samotné soustavy diferenciálních rovnic i chování její aproximace pomocí různých diferenčních schémat k numerickému modelování časového vývoje kontinua můžeme vyšetřovat i na velmi jednoduchém příkladu daném parciální diferenciální rovnicí

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0 \quad (2.141)$$

pro skalár u , jejíž řešení má tvar konstantní obecné vlny

$$u_j^n \equiv u(t_n, x_j) = u_0(x_j - ct_n) \quad (2.142)$$

pohybující se rychlostí c .

Tabulka 2.1: Chyby metody FTCS

$k\Delta x$	$ck\Delta t$	v/c	$\cos^{-1} vk\Delta t$
10°	10°	.985	1.015
30°	30°	.886	1.118
90°	90°	.500	1.414
90°	45°	.590	1.118=1.25 ^{1/2}
90°	10°	.634	1.006=1.057 ^{1/9}

FTCS Patrně nejelementárnější metoda řešení spočívá ve vyjádření časové derivace funkce u z pohybové rovnice pomocí ostatních členů a v postupném přičítání k počátečním hodnotám u_0 v každém bodě přírůstků $\Delta t \partial_t u$ odpovídajících konstantnímu časovému kroku Δt . Prostorové derivace přitom nahradíme konečnými diferencemi mezi sousedními body z obou stran (proto název *forward time – centered space*), takže v případě rov. (2.141) dostáváme rekurentní vztahy

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (2.143)$$

Jestliže například počáteční podmínka má tvar $u_0(x) = \sin kx$, pak se s pomocí součtových vzorců můžeme úplnou indukci přesvědčit, že

$$u_j^n = \cos^{-n}(vk\Delta t) \sin(kx_j - vkt_n), \quad (2.144)$$

kde

$$\text{tg}(vk\Delta t) = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x). \quad (2.145)$$

Tento výsledek souhlasí s přesným řešením (2.142) pouze v limitě $\Delta x \rightarrow 0$ a $\Delta t \rightarrow 0$, kdy $v \equiv c$. Pro konečné diference však vidíme (např. v tab. 2.1), že vlny s kratší vlnovou délkou postupují menší rychlostí v a jejich amplituda roste. Protože počáteční tvar u_0 obecné neharmonické vlny můžeme rozložit na jednotlivé fourierovské složky, které se pak v důsledku disperze rychlosti $v = v(k)$ budou rozbíhat a vzhledem ke členu $\cos^{-n}(vk\Delta t)$ jejich amplitudy porostou rozdílou rychlostí, je zřejmé, že vadou integračního schématu se bude tvar vlny měnit.

V případě FTCS schématu (2.143) pro naši modelovou rovnici (2.141) dostáváme ve shodě s (2.144) a (2.145)

$$\tilde{u}_k^n = \left(1 - i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x\right)^n \tilde{u}_k^0, \quad (2.146)$$

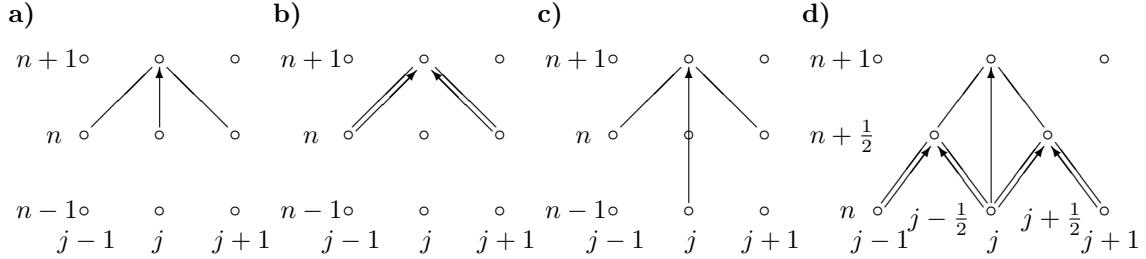
tj. divergenci všech modů, která je tím rychlejší, čím větší je tzv. Courantovo číslo $C = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$. V důsledku této numerické nestability se mohou např. hodnoty v sudých a lichých bodech neustále navzájem vzdalovat, aniž by to schéma (2.143), ve kterém se tyto soustavy bodů navzájem ovlivňují pouze prostřednictvím svých prostorových derivací (a nikoliv svojí celkovou velikostí), mohlo kompenzovat. K potlačení této nestability je proto třeba do integračního schématu zavést jisté středování.

Laxovo schéma Jednu z nekonečně mnoha možností dává tzv. Laxovo schéma vyjádřené rekurentním vztahem

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (2.147)$$

Metodou von Neumannovy analýzy stability odtud můžeme vyjádřit rekurentní vztah pro fourierovské složky

$$\tilde{u}_k^{n+1} = \left(\cos k\Delta x - i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x\right) \tilde{u}_k^n, \quad (2.148)$$



Obrázek 2.4: Grafické znázornění numerických schémat – a) FTCS, b) Lax, c) leap-frog, d) Lax – Wendroff; šipka znázorňuje určení počáteční hodnoty, prostá čára určení časové derivace

odkud je zřejmé, že v tomto schématu jsou všechny módy stabilní zvolíme-li $C^2 \leq 1$. Rovnici (2.147) můžeme také přepsat ve tvaru

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2.149)$$

který se od (2.143) liší přídatným třetím členem. Tento člen je úměrný diferencně vyjádřené druhé derivaci u , která zjevně přispívá k potlačení oscilací funkce u . Takovýto člen nazýváme numerickou (umělou) viskozitou.

Schéma leap-frog FTCS i Laxovo schéma počítají prostorové derivace z hodnot na počátku časového kroku, ty se však v průběhu kroku mění. Přesnější výsledek by daly derivace ve středu časového kroku. Toho lze jednoduše dosáhnout ve schématu leap-frog

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (2.150)$$

které k hodnotám v sudých uzlech (podle parity $j + n$) přičítá přírůstky vypočtené z derivací v lichých bodech a naopak.

Laxovo – Wendroffovo schéma Velikost numerické viskozity, jaká se objevuje ve třetím členu na pravé straně (2.149), lze zvolit také tak, aby výsledné schéma bylo přesné do druhého řádu Taylorova rozvoje podle Δt

$$u_j^{n+1} = u(t_n + \Delta t, x_j) = u_j^n + \Delta t \partial_t u(t_n, x_j) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \partial_{tt}^2 u(t_n, x_j). \quad (2.151)$$

Podle vlnové rovnice, kterou dostaneme derivováním (2.141), totiž $\partial_{tt}^2 u = -c\partial_{tx}^2 u = c^2\partial_{xx}^2 u$, takže tuto vlastnost má schéma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.152)$$

zavedené Laxem a Wendroffem. Laxovo – Wendroffovo schéma lze také interpretovat jako postupný odhad hodnot ve středech buněk sítě Laxovou metodou

$$u_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j\pm 1}^n) \mp \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j\pm 1}^n - u_j^n), \quad (2.153)$$

z nichž ve druhém půlkroku vypočteme analogicky metodě leap-frog výsledný krok

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}). \quad (2.154)$$

Schéma upwind Další velmi jednoduchou možností je schéma počítající prostorové difference asymetricky ‘po proudu’ (upwind, upstream)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (2.155)$$

které můžeme přepsat v symetrizovaném tvaru

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{|c|\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (2.156)$$

Cvičení 6 *Proveďte von Neumannovu analýzu stability numerického schématu*

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \sigma(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

s obecnou numerickou viskozitou σ a aplikujte ji na výše uvedená nebo další schémata.

2.3.2 N-částicové metody

Alternativní metodou k popisu dynamiky velkého souboru částic (např. atomů plynu nebo hvězd v galaxii) jako kontinua pomocí hydrodynamických, tj. parciálních diferenciálních rovnic, je jeho reprezentace pomocí souřadnic velkého počtu částic, pro které řešíme pohybové rovnice. Nízká výpočetní kapacita nás zpravidla nutí omezit se na počet bodů, který je o mnoho řádů nižší, než skutečný počet částic studované soustavy. Každá počítaná částice v tom případě představuje podstatně větší počet částic. Tomu je třeba přizpůsobit především započtení vzájemné interakce částic. Konkrétní naprogramování výpočtu může pracovat buď s trvale sledovanými částicemi, nebo může používat různé varianty metody Monte Carlo s náhodně generovanými, nebo náhodně interagujícími částicemi. Výhodou částicových modelů ve srovnání se síťovými metodami je okolnost, že nemarají výpočetní čas na modelování vývoje v oblastech s velmi nízkou hustotou, které nemohou prakticky ovlivnit řešení v hustých oblastech prostoru.

N-particle simulations. Přímočaré programové implementace simultánního řešení pohybových rovnic zpravidla počítají s řádově 10^4 částic. Jsou výhodné zejména pro modelování systémů se slabými binárními interakcemi (hvězdokupy, galaxie, velkorozměrová struktura v kosmologii). Zrychlení jednotlivých částic v důsledku binární interakce silně vzrůstá při blízkých setkáních s jinými částicemi. Proto jsou výhodné programy s možností proměnného časového kroku, voleného pro každou částici podle její okamžité vzdálenosti od nejbližších sousedů. Úspora strojového času na slabě interagujících částicích pak umožňuje zvýšit o řád počet sledovaných částic.

PIC – Particles in cell. Strojový čas potřebný k výpočtu zrychlení při explicitním zahrnutí všech binárních interakcí (rovněž i jenom výpočet vzájemných vzdáleností, který by umožnil odhadnout, které interakce mohou být zanedbány) roste u N-částicových metod jako N^2 . Proto může být výhodné kombinovat částicovou metodu se síťovou metodou – rozdělit prostor na objemové buňky, pro každou částici určovat, ve které buňce se v daném okamžiku nachází, a explicitně počítat pouze její interakci s částicemi v téže nebo sousední buňce, zatímco interakce s ostatními se berou jako násobek počtu částic ve vzdálené buňce a interakci s charakteristickou částicí ve středu oné buňky. Podobného efektu lze dosáhnout i sdružováním vzdálených částic do jistých kup, nebo např. nahrazením blízkých binárních interakcí náhodnými srážkami a vzdálených interakcí s kolektivním polem počítaným metodou sítí.

SPH – Smoothed particle hydrodynamics. Podobně jako N-částicové simulace, metoda SPH aproximuje kontinuum velkým počtem částic v bodech $r_a(t)|_{a=1}^N$, z nichž každé je přiřazeno jisté ‘rozmazávací’ jádro, tj. nezáporná prostorová funkce $W(r - r_a, h)$ normovaná na jedničku ($\int W d^3r = 1$), parametrizovaná charakteristickou ‘rozmazávací’ délkou h , s (prakticky) nenulovým nosičem v malém okolí r_a ; příkladem jádra W může být Gaussova funkce

$$W(r - r_a, h) = h^{-3} \pi^{-\frac{3}{2}} \exp(-x^2), \quad \text{kde} \quad x = h^{-1}|r - r_a|, \quad (2.157)$$

nebo C^2 -spojité Wendlandovo jádro s konečným nosičem

$$W(r - r_a, h) = \frac{21}{256\pi h^3} (2 - x)^4 (2x + 1), \quad \text{pro} \quad x < 2, \quad (2.158)$$

a $W = 0$ pro $x \geq 2$. Jestliže a -tá částice přispívá k nějaké (intenzivní) fyzikální veličině q (např. hustotě hmoty, hybnosti či energie ap.) extenzivní hodnotou Q_a (hmotností, hybností, energií částice), pak střední hustota této veličiny v bodě r je dána

$$\langle q(r) \rangle \simeq \sum_a Q_a W(r - r_a(t), h), \quad (2.159)$$

tj. součtem příspěvků hustot od všech částic. Například hustotu hmoty $\rho(r)$ tak můžeme vypočítat podle (2.159) vztahem

$$\rho(r) \simeq \sum_a m_a W(r - r_a(t), h), \quad (2.160)$$

kde m_a je hmotnost a -té částice. Hodnoty intenzivních veličin $q(r)$ (jako je tlak, teplota ap.) můžeme interpolovat vztahem

$$\langle q(r) \rangle \simeq \sum_a \frac{m_a}{\rho_a} q(r_a) W(r - r_a(t), h), \quad (2.161)$$

kde ρ_a je hustota hmoty a -té částice, vypočtená pomocí (2.160) v jejím středu r_a . (Pro samotnou hustotu ρ jsou výrazy (2.160) a (2.161) identické).

Pro úsporu výpočetního času se sčítání provádí přes omezený počet blízkých částic. K jejich identifikaci lze užít pomocnou prostorovou síť. V případě započtení dalekodosahových sil, tj. především vlastní gravitace, jejíž skalární potenciál je dán řešením Poissonovy rovnice, je nutné započítat příspěvek všech, tedy i vzdálených částic. Ty lze však pro úsporu výpočetního času sdružit do hierarchicky uspořádaných podmnožin celého souboru (např. metodou *kd-tree*), které pak mohou určit také blízké sousedy.

Derivováním výrazu (2.159) můžeme nalézt gradient veličiny q ve tvaru

$$\langle \nabla^i q(r) \rangle \simeq \sum_a Q_a \frac{\partial}{\partial r^i} W(r - r_a(t), h) \quad (2.162)$$

a časovou derivaci

$$\langle \partial_t q(r) \rangle \simeq - \sum_a Q_a v_a^i \frac{\partial}{\partial r^i} W(r - r_a(t), h), \quad (2.163)$$

kde

$$v_a = \frac{d}{dt} r_a \quad (2.164)$$

je rychlost a -té částice. Jestliže tedy podle (2.159) vypočteme také hustotu hybnosti (z níž a hustoty hmoty ρ lze definovat makroskopickou rychlost $v(r)$)

$$\pi(r) = \rho(r)v(r) \simeq \sum_a m_a v_a(t) W(r - r_a(t), h), \quad (2.165)$$

pak v důsledku (2.163) a (2.164) tyto veličiny identicky splňují rovnici kontinuity hmoty

$$\partial_t \rho + \nabla^i (\rho v^i) = 0. \quad (2.166)$$

Ve srovnání s (2.163) ovšem časová derivace hustoty hybnosti (2.165) bude

$$\partial_t \pi^i(r) \simeq \sum_a m_a \frac{dv_a^i}{dt} W(r - r_a(t), h) - \sum_a m_a v_a^i v_a^j \frac{\partial}{\partial r^j} W(r - r_a(t), h), \quad (2.167)$$

kde druhý člen na pravé straně je v analogii s (2.162)

$$\sum_a m_a v_a^i v_a^j \frac{\partial}{\partial r^j} W(r - r_a(t), h) = \nabla^j (\rho(r) v^i(r) v^j(r)). \quad (2.168)$$

Abychom dostali rovnici zachování hybnosti, tj. pohybovou rovnici např. ve tvaru

$$\partial_t (\rho v^i) + \nabla^j (\rho(r) v^i(r) v^j(r) + P^{ij}) - \rho g^i = 0 \quad (2.169)$$

pro hydrodynamiku plynu s tlakem P^{ij} v silovém poli působícím zrychlením g^i , musí zrychlení každé částice být

$$\frac{dv_a^i}{dt} = -\frac{\nabla^j P_a^{ij}}{\rho_a} + g^i(r_a). \quad (2.170)$$

Hodnotu tlaku P_a (zpravidla izotropního $P^{ij} = P\delta^{ij}$) v každé částici je třeba určit z dalších předpokladů, např. ze stavové rovnice. Podle (2.161) pak můžeme tlak interpolovat do libovolného bodu a v analogii s (2.162) můžeme vypočítat i gradient tlaku

$$\nabla^i P(r) \simeq \sum_a \frac{m_a}{\rho_a} P_a \frac{\partial}{\partial r^i} W(r - r_a(t), h) \quad (2.171)$$

v každém bodě, tedy i ve středu každé částice (kde je derivace jádra nulová, takže gradient tlaku je určen okolními částicemi). Integrovaním pohybových rovnic (2.164) a (2.170) tak dostáváme pohyb částic plynu v Lagrangeovském popisu hydrodynamiky, tj. jeho proudnice.

Metodu SPH lze dále doplnit o řešení rovnice zachování energie, započítání magnetohydrodynamiky a dalších jevů – viz např. [11].

Dodatek A

Výběr z diferenciální geometrie

A.1 Tenzorová algebra

V této kapitole budou shrnuty základní algebraické vlastnosti vektorů, tenzorů a dalších geometrických objektů, tj. vlastnosti odpovídající chování a vztahům jimi popsaných fyzikálních veličin v jednotlivých bodech příslušného fyzikálního prostoru (např. prostoročasu nebo fázového prostoru), nikoliv však jejich prostorovým změnám.

A.1.1 Vektory a kovektory, tenzorový součin a úžení

Definice 1 Vektorový prostor nad tělesem¹ skalárů (zpravidla reálných čísel \mathcal{R} , nebo komplexních čísel) je množina T vektorů, na které je dána operace sčítání s vlastnostmi:

- a) asociativnost, $\forall X, Y, Z \in T: (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
 - b) komutativnost: $X + Y = Y + X$
 - c) $\exists 0 \in T$ (nulový vektor): $X + 0 = X$ ($\forall X \in T$)
 - d) $\forall X \in T, \exists -X \in T$ (opačný vektor): $-X + X = 0$,
- a dále je na T dáno násobení skalárem s vlastnostmi:
- e) $\forall X \in T, a, b \in \mathcal{R}: a(bX) = (ab)X$
 - f) $1 \cdot X = X$
 - g) distributivnost vůči sčítání vektorů: $a(X + Y) = aX + aY$
 - h) distributivnost vůči sčítání skalárů: $(a + b)X = aX + bX$.

Vektory $X_i|_{i=1}^n$ jsou lineárně závislé, jestliže $\exists a_i|_{i=1}^n \in \mathcal{R}: \sum a_i^2 \neq 0, \sum a_i X_i = 0$.

T je n -dimenzionální, jestliže v něm existuje tzv. báze n lineárně nezávislých vektorů a každá $n + 1$ -tice vektorů je lineárně závislá.

Duální vektorový prostor T^* je prostor lineárních zobrazení

$$\xi : T \rightarrow \mathcal{R} .$$

$\{e_k|_{k=1}^n \in T\}$ a $\{\theta^k|_{k=1}^n \in T^*\} = \{e_k|_{k=1}^n\}^*$ jsou vzájemně duální báze T a T^* , jestliže

$$\theta^i(e_j) = \delta_j^i . \tag{A.1}$$

Zřejmě T^* k n -dimenzionálnímu T je rovněž n -dimenzionální. Ztotožňujeme $T^{**} \equiv T$ a píšeme

$$\xi(X) = \langle \xi, X \rangle = X^i \xi_i ,$$

¹Těleso je asociativní okruh s jednotkou ($a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$), ve kterém pro každý nenulový prvek a existuje inverzní prvek a^{-1} ($a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$). Okruh je komutativní grupa (vůči sčítání) s oboustranně distributivním násobením.

kde $X = X^i e_i \in T$ a $\xi = \xi_i \theta^i \in T^*$ (přes shodné horní a dolní indexy se sčítá).

Definice 2 Prostor T_q^p tenzorů typu (p, q) je prostor multilineárních zobrazení

$$A : \underbrace{T^* \times \dots \times T^*}_p \times \underbrace{T \times \dots \times T}_q \rightarrow \mathcal{R} .$$

Na množině tenzorů všech typů je definována operace **tenzorový součin**

$$\otimes : T_q^p \times T_s^r \rightarrow T_{q+s}^{p+r}$$

tak, že

$$(A \otimes B)(\underbrace{\xi, \dots, \eta, \dots}_p, \underbrace{X, \dots, Y, \dots}_r) = A(\underbrace{\xi, \dots, X, \dots}_p, \underbrace{\eta, \dots, Y, \dots}_r) . \quad (\text{A.2})$$

a zobrazení **úžení** v i -tém a j -tém indexu

$$\langle \ \rangle : T_q^p \rightarrow T_{q-1}^{p-1}$$

tak, že

$$\langle A \rangle(\underbrace{\xi, \dots, \eta, \dots}_{i-1}, \underbrace{X, \dots, Y, \dots}_{p-i}, \underbrace{X, \dots, Y, \dots}_{j-1}, \underbrace{X, \dots, Y, \dots}_{q-j}) = \sum_{k=1}^n A(\underbrace{\xi, \dots, \theta^k, \eta, \dots}_{i-1}, \underbrace{X, \dots, e_k, Y, \dots}_{p-i}, \underbrace{X, \dots, Y, \dots}_{j-1}, \underbrace{X, \dots, Y, \dots}_{q-j}) , \quad (\text{A.3})$$

kde $\{e_k |_{k=1}^n\} = \{\theta^k |_{k=1}^n\}^*$ jsou libovolné duální báze.

Zřejmě platí $\dim(T_q^p) = n^{p+q}$. Tenzorový součin tvoří algebru v prostoru direktních součtů $\bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T_q^p$. Každá (nikoliv nutně duální) dvojice bází na T a T^* indukují bázi na T_q^p (tvořenou tenzorovými součiny jejich prvků), v níž lze tenzor $A \in T_q^p$ vyjádřit složkově

$$A = A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_q} .$$

Lze ověřit, že definice úžení je nezávislá na volbě dvojice duálních bází.

A.1.2 Vnější algebra

Definice 3 Prostory p -vektorů $\wedge^p T \subset T_0^p$ resp. p -forem $\wedge^p T^* \subset T_p^0$ ($p \leq n$) jsou podprostory tenzorů antisymetrických ve všech argumentech. **Vnější součin** je zobrazení

$$\wedge : \wedge^p T \times \wedge^q T \rightarrow \wedge^{p+q} T$$

takové, že

$$(X \wedge Y)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{p!q!} (X \otimes Y)(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) , \quad (\text{A.4})$$

kde $|\sigma|$ je parita permutace σ čísel $1, \dots, p+q$. **Vnitřní součin** p -formy ξ a q -vektoru X je $|p-q|$ -forma resp. vektor vzniklý zúžením jejich tenzorového součinu v prvních $\min(p, q)$ indexech,

$$\langle \xi X \rangle = \langle \xi \otimes X \rangle .$$

Zřejmě platí že $\dim(\wedge^p T) = \binom{n}{p}$, $\wedge^0 T = \mathcal{R}$, $\wedge^1 T = T_1^1 = T$, $\wedge^1 T^* = T_1^0 = T^*$. Vnější součin je antisymetrický

$$(X \wedge Y) = (-1)^{qp} (Y \wedge X) , \quad (\text{A.5})$$

lineární a asociativní. Tvoří tedy (tzv. Grassmannovu) algebru v 2^n -dimenzionálním prostoru direktních součtů $\bigoplus_{p=0}^n (\wedge^p T)$.

Definice 4 Zvolíme-li na n -dimenzionálním prostoru T **jednotkovou n -formu** $\epsilon \in \wedge^n T^*$, pak tato definuje **duální zobrazení**

$$* : \wedge^p T \leftrightarrow \wedge^{n-p} T^*$$

tak, že pro $A \in \wedge^p T$, $\omega \in \wedge^p T^*$

$$*A = \frac{1}{p!} \langle \epsilon, A \rangle . \quad (\text{A.6})$$

$$*\omega = \frac{1}{p!} \langle \omega, E \rangle , \quad (\text{A.7})$$

kde $E \in \wedge^n T$ je **jednotkový n -vektor**, pro který

$$*E = 1 . \quad (\text{A.8})$$

Platí

$$**\omega = (-1)^{p(n-p)} \omega . \quad (\text{A.9})$$

Vnější součin p -vektorů je třeba odlišovat od vektorového součinu vektorů, který je také antisymetrická a bilineární operace (někdy také označovaná symbolem \wedge), ale definovaná pouze na 3-dimenzionálním vektorovém prostoru. V takovém prostoru s metrikou lze vektorový součin Z vektorů X, Y lze konstruovat zvednutím indexů jejich kontrakce s jednotkovou 3-formou, $Z \equiv X \times Y = g^{-1}(\langle \epsilon, X \otimes Y \rangle)$.

A.1.3 Skalární součin

Definice 5 Symetrický, tzv. **kovariantní metrický tenzor** $g \in T_2^0$, pro jehož složky g_{ij} v libovolné bázi T^* je

$$\det(g_{ij}) \neq 0 ,$$

definuje na T **skalární součin**

$$(\cdot \cdot) : T \times T \rightarrow \mathcal{F}$$

tak, že pro $\forall X, Y \in T$

$$(X.Y) = (Y.X) = g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \quad (\text{A.10})$$

(kde X^i a Y^j jsou složky v duální bázi), dále definuje **snížování indexů**, tj. zobrazení

$$g : T \rightarrow T^*$$

tak, že

$$\langle g(X), Y \rangle = g(X, Y) . \quad (\text{A.11})$$

g dále indukuje k němu inverzní zobrazení (**zvyšování indexů**)

$$g^{-1} : T^* \rightarrow T ,$$

které definuje skalární součin na T^*

$$(\xi.\eta) = (\eta.\xi) = g(g^{-1}(\xi), g^{-1}(\eta)) = g^{ij} \xi_i \eta_j , \quad (\text{A.12})$$

kde g^{ij} jsou složky **kontravariantního metrického tenzoru** $g^{-1} \in T_0^2$. Báze $\{e_i\}$ je **ortonormální**, jestliže

$$(e_i.e_j) = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j ,$$

a **ortonormální**, jestliže

$$(e_i.e_j) = \pm \delta_{ij} .$$

A.2 Tenzorová analýza

V této kapitole budou shrnuty základní vlastnosti tečných vektorů, vektorových a tenzorových polí a jejich derivací na zakřivených prostorech (varietách) jako je např. obecně relativistický prostoročas.

A.2.1 Tečné vektory a n -formy na varietách

Definice 6 Topologický prostor M je **diferencovatelná varieta** dimenze n , jestliže je dán tzv. úplný atlas souřadnicových map, tj. lokálně definovaných zobrazení

$$\mu, \nu : M \rightarrow \mathcal{R}^n$$

pokrývající celou M takových, že v průniku jejich definičních oborů je $\mu \circ \nu^{-1}$ nekonečně diferencovatelné s nenulovým jakobiánem.

Definice 7 Nechť M je diferencovatelná varieta a \mathcal{F} prostor reálných funkcí (“skalárů”) na M . **Tečným vektorem** v bodě $A \in M$ nazveme zobrazení

$$X_A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$$

které je lineární, tj. splňuje

$$X_A(f + c.g) = X_A(f) + c.X_A(g) \quad (\text{A.13})$$

pro libovolná $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{R}$, pro které platí

$$X_A(f.g) = X_A(f).g(A) + f(A).X_A(g) . \quad (\text{A.14})$$

Množina T_A všech tečných vektorů v pevném bodě A se nazývá **fibře**, a jejich sjednocení $B = \cup_{A \in M} T_A$ **tečný bundle**.

Vlastnost (A.13) určuje, že X_A jsou lineární zobrazení na (∞ -dimenzionálním) vektorovém prostoru \mathcal{F} . Tečný fibře tedy tvoří opět lineární vektorový prostor vůči operacím sčítání a násobení číslem definovaným vztahem

$$(X_A + cY_A)(f) = X_A(f) + cY_A(f) .$$

Vlastnost (A.14) určuje, že X_A se chová jako derivace (tedy např. $X_A(f^n) = n f^{n-1} X_A(f)$), takže tečný vektor je diferenciální operátor. Lze ukázat, že souřadnicové vyjádření X_A v mapě μ ($\mu(A) = (x_A^1, \dots, x_A^n)$) má tvar

$$X_A(f) = X_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \mu^{-1})|_{\mu(A)} . \quad (\text{A.15})$$

Fibre T_A je tedy n -dimenzionální vektorový prostor a $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_{i=1}^n\}$ jeho souřadnicová báze indukovaná mapou μ . Tečný bundle B tvoří $2n$ -dimenzionální varietu, jejíž atlas je tvořen všemi mapami slučitelnými s mapou, která $\forall X_A \in T_A$ přiřadí $(x_A^1, \dots, x_A^n, X_A^1, \dots, X_A^n) \in \mathcal{R}^{2n}$.

Definice 7 odpovídá intuitivní představě vektoru X_A jako šipky z bodu $A \in M$ do (infinitesimalně vzdáleného) bodu $A + \Delta$ tak, že pro $\forall f \in \mathcal{F}$ (a speciálně i když za f zvolíme složku souřadnicové mapy) $X_A(f)$ udává lineární člen Taylorova rozvoje

$$f(A + \Delta) \simeq f(A) + X_A(f) .$$

Definice 8 Necht M je diferencovatelná varieta a \mathcal{F} prostor reálných funkcí (“skalárů”) na M . Tečný vektorový prostor T na M je prostor **tečných vektorů** X (neboli “kontravariantních vektorových polí”) na M , tj. prostor zobrazení

$$X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

kteřá jsou lineární a diferenciální, tj. splňují

$$X(f + c.g) = X(f) + c.X(g) \quad (\text{A.16})$$

$$X(f.g) = X(f).g + f.X(g) \quad (\text{A.17})$$

pro libovolná $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{R}$.

Vektorové pole na M tvoří n -dim. podvarietu tečného bundlu.

Definiční obor $\{A \in M\}$ vektorového pole lze omezit na libovolné $N \subset M$ ($X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$). Je-li N podvarieta M , pak $T(N)$ je podprostor $T(M)$ vektorů tečných k N . Zřejmě totiž každá funkce na M je současně funkcí na N , proto tečný vektor na N je vektorem i na M , definovaným pouze v bodech N a ‘necitlivým’ k rozdílnému chování funkcí mimo N . Každá souřadnicová mapa $\mu(A) = \{x^i(A)|_{i=1}^n\}$ indukuje ve svém definičním oboru souřadnicovou bázi $\{\partial_{x^i}|_{i=1}^n\}$ (rozumí se $\partial_{x^i} f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \mu^{-1})$). Při přechodu k souřadnicím $\{y^i\}$ se prvky souřadnicové báze transformují

$$\partial_{x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \partial_{y^j} . \quad (\text{A.18})$$

Tvrzení 1 Komutátor

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \quad (\text{A.19})$$

vektorů X, Y je vektor.

Pro důkaz je klíčová vlastnost komutátoru daná rovnicí (A.15), která platí, protože smíšené členy typu $X(f).Y(g)$ se vyruší. Prvky souřadnicové báze komutují (jsou ‘holonomní’). V obecné bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$

$$[X, Y] = (X(Y^k) - Y(X^k) + X^i Y^j c_{ij}^k) e_k , \quad (\text{A.20})$$

kde

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k = \theta^k([e_i, e_j]) \quad (\text{A.21})$$

jsou tzv. **koeficienty struktury** dané báze.

Definice 9 Kotečný vektorový prostor T^* je duální vektorový prostor **1-forem** neboli “kovariantních vektorových polí”, tj. prostor zobrazení

$$\xi : T \rightarrow \mathcal{F} .$$

Analogicky prostor T_q^p **tenzorů** typu (p, q) je prostor multilineárních zobrazení

$$A : \underbrace{T^* \times \dots \times T^*}_p \times \underbrace{T \times \dots \times T}_q \rightarrow \mathcal{F}$$

a prostory **p -vektorů** resp. **p -forem** jsou antisymetrické podprostory T_0^p resp. T_p^0 . V prostorech všech tenzorů resp. p -vektorů a p -forem jsou definovány tenzorový součin a úžení, resp. vnější a vnitřní součin analogicky definicím 2 a 3.

Tenzor typu T_p^0 na M je současně tenzorem téhož typu na podvarietě $N \subset M$, spec. p -forma na M je p -formou na N (nenulovou pouze pro $p \leq \dim N$).

Definice 10 Vnější diferenciál je lineární zobrazení

$$d : \wedge^p T^* \rightarrow \wedge^{p+1} T^*$$

takové, že

$$df(X) = X(f) \quad (\text{A.22})$$

pro $f \in \wedge^0 T^* = \mathcal{F}$,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) \quad (\text{A.23})$$

pro $\omega \in \wedge^p T^*$ a

$$dd\omega = 0. \quad (\text{A.24})$$

Pro každou souřadnicovou mapu $\{x^i|_{i=1}^n\}$ tvoří $\{dx^i|_{i=1}^n\}$ bázi T^* , která se transformuje

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \quad (\text{A.25})$$

a je duální k bázi $\{\partial_{x^i}|_{i=1}^n\}$

Tvrzení 2 Pro 1-formu ω je

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \quad (\text{A.26})$$

Důkaz: V libovolné souřadnicové bázi platí podle (A.18)

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) &= X(\omega_j Y^j) - Y(\omega_j X^j) - \omega_j (X(Y^j) - Y(X^j)) = \\ &= X(\omega_j) Y^j - Y(\omega_j) X^j = (d\omega_j \wedge dx^j)(X, Y) = d\omega(X, Y) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Důsledek: V duální bázi lze koeficienty struktury vyjádřit alternativně k (A.21) jako

$$c_{ij}^k = -d\theta^k(e_i, e_j). \quad (\text{A.27})$$

Definice 11 $\omega \in \wedge^p T^*$ definuje **míru** (integrál) na p -dimenzionální podvarietě $N \subset M$

$$\int \omega = \int \omega(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^p}) dx^1 \dots dx^p, \quad (\text{A.28})$$

kde $\{x^i|_{i=1}^p\}$ je libovolná souřadnicová mapa na N .

Tvrzení 3 **Zobecněná Stokesova věta** Pro uzavřenou p -dimenzionální hranici ∂V $(p+1)$ -dimenzionální oblasti V platí

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega. \quad (\text{A.29})$$

Definice 12 **Vnitřní derivace** je zobrazení $\delta : T \rightarrow \mathcal{F}$ takové, že $\forall f \in \mathcal{F}$ a $X, Y \in T$ platí

$$\delta(fX + Y) = X(f) + f\delta X + \delta Y. \quad (\text{A.30})$$

Vnitřní derivace vektorového pole X je tedy ve zvolené bázi v n -dimenzionálním prostoru dána n -ticí funkcí (derivacemi jednotlivých prvků báze),

$$\delta X = e_i(X^i) + X^i \delta e_i . \quad (\text{A.31})$$

Každá n -forma Ω na n -dimensionální varietě určuje vnitřní derivaci δ vektoru X vztahem

$$d\langle \Omega X \rangle = (\delta X)\Omega . \quad (\text{A.32})$$

V souřadnicové bázi, ve které $\Omega = \Omega_0 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ a $X = X^i \partial_i$, totiž

$$d\langle \Omega X \rangle = \partial_i(\Omega_0 X^i) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (\partial_i(X^i) + X^i \partial_i(\ln \Omega_0)) \Omega_0 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n , \quad (\text{A.33})$$

což odpovídá vztahu (A.31), jestliže vnitřní derivace prvků báze ∂_i zavedeme vztahem

$$\delta \partial_i = \partial_i(\ln \Omega_0) . \quad (\text{A.34})$$

Naopak, obecnou vnitřní derivaci δ lze zapsat ve tvaru (A.33), jestliže lze nalézt funkci Ω_0 tak, aby splňovala rovnice (A.34), tj. jsou-li splněny podmínky integrability těchto rovnic

$$\partial_i(\delta \partial_j) = \partial_j(\delta \partial_i) , \quad (\text{A.35})$$

které mají v obecné bázi tvar

$$e_i(\delta e_j) - e_j(\delta e_i) = \delta[e_i, e_j] . \quad (\text{A.36})$$

Důsledek: Pro vnitřní derivaci δ splňující tyto podmínky platí podle (A.32) a (A.29)

$$\int_V (\delta X)\Omega = \int_{\partial V} \langle \Omega X \rangle . \quad (\text{A.37})$$

A.2.2 Afinní konexe

Definice 13 Afinní konexí nazveme zobrazení

$$\nabla : T \times T \rightarrow T$$

takové, že $\forall X, Y, Z \in T, f \in \mathcal{F}$

$$\nabla_{f.Y+Z} X = f.\nabla_Y X + \nabla_Z X \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla_X(f.Y + Z) = X(f).Y + f.\nabla_X Y + \nabla_X Z . \quad (\text{A.39})$$

Afinní konexe $\nabla_X Y$ se tedy chová tenzorově vůči indexu X a diferenciálně vůči argumentu Y , tj. popisuje změnu pole Y podél pole X . V libovolné duální bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + Y^i \omega^k_i(X)) . e_k , \quad (\text{A.40})$$

kde

$$\omega^k_i = \omega^k_{ij} \theta^j = \theta^k(\nabla_{e_j} e_i) . \theta^j \quad (\text{A.41})$$

jsou **1-formy konexe** v příslušné bázi (jejich složky ω^k_{ij} jsou tzv. **Ricciho rotační koeficienty**).

Požadavkem

$$X(\langle \xi Y \rangle) = \langle \nabla_X \xi Y \rangle + \langle \xi \nabla_X Y \rangle, \quad (\text{A.42})$$

resp. analogickým požadavkem na rozderivování tenzorového součinu a jeho zúžení, je definována afinní konexe také na 1-formách

$$\nabla_X \xi = (X(\xi_k) - \xi_i \omega^i_k(X)) \cdot \theta^k, \quad (\text{A.43})$$

resp. na tenzorech T_q^p jako zobrazení

$$\nabla : T \times T_q^p \rightarrow T_q^p$$

takové, že $\forall A \in T_q^p, X, Y, \dots \in T, \xi, \dots \in T^*$

$$X(A(\xi, \dots, Y, \dots)) = \nabla_X A(\xi, \dots, Y, \dots) + A(\nabla_X \xi, \dots, Y, \dots) + \dots + A(\xi, \dots, \nabla_X Y, \dots) + \dots \quad (\text{A.44})$$

Definice 14 Kovariantní derivací (odpovídající afinní konexi ∇) nazveme zobrazení

$$D : T_q^p \rightarrow T_{q+1}^p$$

takové, že $\forall A \in T_q^p, X \in T$

$$\langle DA \otimes X \rangle = \nabla_X A. \quad (\text{A.45})$$

V libovolné duální bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$ značíme

$$DA = \nabla_{e_k} A \otimes \theta^k = A_{j_1, \dots, j_q; k}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_q} \otimes \theta^k, \quad (\text{A.46})$$

a píšeme

$$A_{j_1, \dots, j_q; k}^{i_1, \dots, i_p} = A_{j_1, \dots, j_q, k}^{i_1, \dots, i_p} + A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \omega^i_{ik} + \dots - A_{j, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \omega^j_{j_1 k} - \dots, \quad (\text{A.47})$$

kde

$$A_{j_1, \dots, j_q, k}^{i_1, \dots, i_p} = e_k(A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}).$$

Definice 15 Divergenci vektorového pole X (odpovídající afinní konexi ∇) nazveme skalár, který je zúžením kovariantní derivace X , tj.

$$\text{div} X = \langle DX \rangle = X^k_{,k} + X^i \omega^k_{ik}. \quad (\text{A.48})$$

Porovnáním tohoto vztahu s (A.31) je zřejmé, že divergence je vnitřní derivací a její působení na vektory báze je dáno zúžením Ricciho rotačních koeficientů,

$$\delta e_i = \omega^k_{ik}. \quad (\text{A.49})$$

Matice 1-forem konexe (viz (A.41)) se nechová tenzorově v indexech k a i při přechodu k jiné bázi, avšak lze z ní tenzory vytvořit.

Definice 16 Jestliže ∇ je afinní konexe, pak **tenzorem torze** (určeným touto konexí) nazveme tenzor $Q \in (T \otimes \wedge^2 T^*) \subset T_2^1$ takový, že $\forall X, Y \in T$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \langle Q, X \otimes Y \rangle \quad (\text{A.50})$$

a **tenzorem křivosti** nazveme tenzor $R \in (T \otimes T^* \otimes \wedge^2 T^*) \subset T_3^1$ takový, že $\forall X, Y, Z \in T$

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \langle R, Z \otimes X \otimes Y \rangle. \quad (\text{A.51})$$

Oba tyto tenzory jsou antisymetrické v posledních dvou argumentech (X a Y), proto je lze ve zvolené bázi reprezentovat 2-formami torze τ^k resp. křivosti Ω^k_i tak, že

$$Q = e_k \otimes \tau^k ,$$

$$R = e_k \otimes \theta^i \otimes \Omega^k_i .$$

Z porovnání (A.40) a (A.20) je zřejmé, že

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = (Y^i \omega^k_i(X) - X^i \omega^k_i(Y) - X^i Y^j c^k_{ij}) . e_k , \quad (\text{A.52})$$

takže

$$Q^k_{ij} = \omega^k_{ji} - \omega^k_{ij} - c^k_{ij} . \quad (\text{A.53})$$

Tvrzení 4 Cartanovy rovnice struktury první

$$\tau^k = d\theta^k + \omega^k_i \wedge \theta^i \quad (\text{A.54})$$

a druhé

$$\Omega^k_i = d\omega^k_i + \omega^k_j \wedge \omega^j_i . \quad (\text{A.55})$$

Speciálně pro konexi bez torze je pravá strana (A.54) identicky rovna nule. Důkaz (A.54) plyne dosazením (A.27) do (A.53). Podobně (A.55) vyplývá z (A.51) dosazením (A.40) a užitím (A.26).

A.2.3 Riemannovská geometrie

Definice 17 Metrickou konexí nazýváme afinní konexi ∇ , která zachovává skalární součin, tj. takovou, která splňuje

$$Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y) \quad (\text{A.56})$$

pro všechna X, Y, Z .

Dosazením za X, Y, Z bázevých vektorů e_i, e_j, e_k dostáváme vztah

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} , \quad (\text{A.57})$$

kde 1-formy $\omega_{ij} = g_{ik} \omega^k_j$, nebo ve složkovém zápisu

$$e_k(g_{ij}) = \omega_{ijk} + \omega_{jik} . \quad (\text{A.58})$$

Po snížení indexu k v rovnici (A.53) můžeme nalézt řešení lineární soustavy (A.53), (A.58) ve tvaru

$$\begin{aligned} \omega_{ijk} = & \frac{1}{2} (e_k(g_{ij}) + e_j(g_{ik}) - e_i(g_{jk}) \\ & - c_{ijk} + c_{jik} + c_{kij} \\ & - Q_{ijk} + Q_{jik} + Q_{kij}) . \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Afinní konexe je tak jednoznačně určena požadavkem metričnosti a požadavkem vymizení torze (pro který je třetí řádek tohoto výrazu identicky rovný nule). V souřadnicové bázi, ve které vymizí i koeficienty struktury ve druhém řádku, jsou složky ω^i_{jk} nazývány Christoffelovy symboly (a obvykle značeny Γ^i_{jk}).

Tvrzení 5 Divergence (definovaná vztahem (A.48)) odpovídající metrické konexi bez torze je vnitřní derivace určená podle vztahu (A.32) n -formou Ω objemu jednotkového vzhledem k metrice generující konexi

$$(\operatorname{div} X)\Omega = d\langle X, \Omega \rangle . \quad (\text{A.60})$$

Důkaz: Podle (A.59)

$$\omega^k{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ki} g_{ik,j} = \frac{|g|,j}{2|g|} , \quad (\text{A.61})$$

kde $|g|$ je determinant matice kontravariantních složek metriky (složka g^{ik} jakožto prvek matice inverzní ke kovariantním složkám metriky je totiž podíl subdeterminantu ke g_{ik} a celého determinantu $|g|$). Metrická divergence tedy splňuje podmínku (A.34) pro

$$\Omega = \sqrt{\pm|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n , \quad (\text{A.62})$$

což je n -forma objemu jednotkového vůči g , která má v libovolné ortonormální bázi jednoduchý tvar $\Omega = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$.

Důsledek (Gaussova věta): Pro riemannovskou divergenci vektorového pole X platí podle (A.37)

$$\int_V (\operatorname{div} X)\Omega = \int_{\partial V} \langle \Omega, X \rangle . \quad (\text{A.63})$$

Tvrzení 6 Pro metrickou konexi splňují složky $R^i{}_{klm} = \langle \Omega^i{}_k, e_l \otimes e_m \rangle$ tenzoru křivosti antisymetrii

$$R_{iklm} = -R_{kilm} . \quad (\text{A.64})$$

Pro konexi bez torze splňují symetrii

$$R^i{}_{(klm)} \equiv R^i{}_{klm} + R^i{}_{lmk} + R^i{}_{mkl} = 0 , \quad (\text{A.65})$$

a tzv. **Bianchiho identity**

$$R^i{}_{k(lm;n)} \equiv R^i{}_{klm;n} + R^i{}_{knl;m} + R^i{}_{kmn;l} = 0 . \quad (\text{A.66})$$

Na n -dimensionální varietě má **Riemannův tenzor**, tj., tenzor křivosti určený metrickou konexi bez torze $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ algebraicky nezávislých složek.

Ricciho tenzor $R_{km} = R^i{}_{kim}$ je potom symetrický.

Tvrzení 7 Vektor $X = \frac{d}{dt}$ tečný ke geodetické křivce $x = x(t)$, tj. křivce, která je extrémálou délky S ,

$$0 = \delta S = \delta \int \sqrt{g(X, X)} dt , \quad (\text{A.67})$$

je paralelně přenášen podél této křivky, tj.

$$\nabla_X X = 0 . \quad (\text{A.68})$$

Důkaz: Rovnice extrémály akce $S = \int L(x, \dot{x}) dt$ dostaneme variováním δx dráhy x a jejich derivací $\delta \dot{x}$. K vyjádření lagrangiánu geodetiky v tomto tvaru je výhodné vzít složky ($X^i = \dot{x}^i$) tečného vektoru $X \equiv \frac{d}{dt}$ v souřadnicové basi ∂_{x^i} souřadnicového systému x^i , tj.

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j} . \quad (\text{A.69})$$

Dosazením tohoto lagrangiánu do standardního postupu variování

$$0 = \delta S = \int \delta L(x, \dot{x}) dt = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt , \quad (\text{A.70})$$

dostáváme vztah

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})}} g_{ij,k}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{d}{dt} \left(\frac{g_{ik} \dot{x}^i + g_{kj} \dot{x}^j}{2\sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})}} \right) , \quad (\text{A.71})$$

tj.

$$0 = \frac{1}{2} (g_{ij,k} - g_{ik,j} - g_{kj,i}) \dot{x}^i \dot{x}^j - g_{ik} \ddot{x}^i - g_{ik} \dot{x}^i \sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})}} \right) . \quad (\text{A.72})$$

Tento vztah platí pro libovolnou parametrizaci dráhy $x(t)$. Jestliže navíc naložíme podmínku aby t byl afinní parametr, tj. $t = S$, pak $g(\dot{x}, \dot{x}) = 1$ a poslední člen vymizí. S touto podmínkou můžeme geodetiku vypočítat i z ekvivalentního variačního principu

$$0 = \delta \int g(\dot{x}, \dot{x}) dt . \quad (\text{A.73})$$

Vzhledem k tomu, že v souřadnicové bázi $c_{ijk} = 0$, nalézáme porovnáním prvního členu na pravé straně (A.72) s rovnicí (A.59), že odpovídá $-\omega_{kij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ metrické konexe bez torze ($Q_{ijk} = 0$) a první dva členy tak dávají levou stranu rovnice (A.68).

A.3 Lieova derivace a Killingovy vektory

Definice 18 Lieova derivace \mathcal{L}_X podle vektorového pole X je zobrazení $\mathcal{L}_X : T_q^p \rightarrow T_q^p$ takové, že

$$\mathcal{L}_X(A \otimes B) = (\mathcal{L}_X A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{L}_X B) , \quad (\text{A.74})$$

$$\mathcal{L}_X \langle A \rangle = \langle \mathcal{L}_X A \rangle , \quad (\text{A.75})$$

$$\mathcal{L}_X f = X(f) \quad \text{pro } \forall f \in T_0^0 , \quad (\text{A.76})$$

a

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad \text{pro } \forall Y \in T_0^1 . \quad (\text{A.77})$$

Ve srovnání s rov. (A.38) pro afinní konexi přibývá na pravé straně výrazu

$$\mathcal{L}_{fX+Z} Y = f \mathcal{L}_X Y + \mathcal{L}_Z Y - Y(f) X \quad (\text{A.78})$$

třetí člen. Proto v obecné bázi $\{e_i\}$

$$\mathcal{L}_X Y = X^i \mathcal{L}_{e_i} Y - Y(X^i) e_i = X^i e_i (Y^k) e_k - Y^k e_k (X^i) e_i + X^i Y^k [e_i, e_k] , \quad (\text{A.79})$$

a speciálně v souřadnicové bázi

$$(\mathcal{L}_X Y)^i = X^k Y^i_{,k} - Y^k X^i_{,k} . \quad (\text{A.80})$$

Protože pro $\sigma \in T_1^0$

$$\mathcal{L}_X \langle \sigma, Y \rangle = \langle \mathcal{L}_X \sigma, Y \rangle + \langle \sigma, \mathcal{L}_X Y \rangle , \quad (\text{A.81})$$

pro složky Lieovy derivace ko-vektoru platí obecně

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \sigma)_i &= \langle \mathcal{L}_X \sigma, e_i \rangle = \mathcal{L}_X \langle \sigma, e_i \rangle - \langle \sigma, \mathcal{L}_X e_i \rangle = X(\sigma_i) - \langle \sigma, [X, e_i] \rangle \\ &= X^k e_k(\sigma_i) + e_i(X^k) \sigma_k - X^k \langle \sigma, [e_k, e_i] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

V souřadnicové bázi $\{dx^i\}$ tedy platí pro složky

$$(\mathcal{L}_X \sigma)_i = X^k \sigma_{i,k} + \sigma_k X^k_{,i} \quad (\text{A.83})$$

a pro derivace prvků báze

$$\mathcal{L}_X(dx^k) = X^k_{,i} dx^i, \quad (\text{A.84})$$

takže pro libovolný skalár f

$$\mathcal{L}_X(df) = d[X(f)]. \quad (\text{A.85})$$

Podobně pro Lieovy derivace vyšších tenzorů přibývá k derivacím složek pro každý kontravariantní nebo kovariantní index člen s derivacemi X analogický druhým členům v rovnicích (A.80) nebo (A.83). Jestliže varieta je riemannovská, parciální derivace v těchto rovnicích mohou být nahrazeny i kovariantními derivacemi, protože přídavné členy s konexemi se v důsledku symetrie $\omega_{i(jk)}$ vzájemně vyruší. Speciálně pro p -formu σ platí (vzhledem k (A.84))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \sigma &= \mathcal{L}_X(\sigma_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = (X^k \sigma_{i_1 \dots i_p, k} + \sum \sigma_{i_1 \dots k \dots i_p} X^k_{,i_k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= d\langle \sigma, X \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Tvrzení 8 *Nechť na n -dimenzionální varietě M je dána jednoparametrická grupa pohybů (tj. zobrazení $M \times \mathcal{R} \rightarrow M$ takové, že $\forall w \in \mathcal{R}$ a $x_0 \in M \exists x_w = x(x_0, w) \in M$). Pak pro každou otevřenou oblast Σ_0 (která se grupovým pohybem transformuje na Σ_w) p -dimenzionální nadplochy ($p \leq n$) a p -formu $\sigma \in \wedge^p T^*$ platí*

$$\frac{d}{dw} \int_{\Sigma_w} \sigma = \int_{\Sigma_w} \mathcal{L}_{\frac{d}{dw}} \sigma. \quad (\text{A.87})$$

Důkaz vyplývá ze záměnnosti integrace a derivace v souřadnicovém vyjádření

$$\int_{\Sigma_w} \sigma = \int \langle \sigma, \frac{\partial}{\partial s_1} \dots \frac{\partial}{\partial s_p} \rangle ds_1 \dots ds_p = \int \sigma_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p} ds_1 \dots ds_p, \quad (\text{A.88})$$

kde $\{s_1, \dots, s_p\}$ je libovolná parametrizace nadplochy Σ_0 , přenášená grupovým pohybem i na nadplochy Σ_w ($x^i = x^i(s_1 \dots s_p, w)|_{i=1}^n$) a $\frac{\partial x^{i_k}}{\partial s_k}$ jsou souřadnicové složky vektorů tečných k těmto plochám. Vektor tečný k pohybovým trajektoriím je v souřadnicovém vyjádření

$$X \equiv \frac{d}{dw} = \frac{\partial x^i}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (\text{A.89})$$

takže derivováním (A.88) dostáváme

$$\frac{d}{dw} \int_{\Sigma_w} \sigma = \int \left[\sigma_{i_1 \dots i_p, k} X^k \frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p} + \sum_{k=1}^p \sigma_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1} \dots \frac{\partial^2 x^{i_k}}{\partial s_k \partial w} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p} \right] ds_1 \dots ds_p, \quad (\text{A.90})$$

což podle (A.86) souhlasí s pravou stranou dokazovaného vztahu (A.87).

Definice 19 *Na riemannovské varietě s metrikou g se vektor ξ nazývá **Killingův vektor**, jestliže*

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \quad (\text{A.91})$$

Vyjádříme-li tuto podmínku v souřadnicových složkách

$$0 = (\mathcal{L}_\xi g)_{ik} = \xi^l g_{ik;l} + g_{lk} \xi^l_{;i} + g_{il} \xi^l_{;k} , \quad (\text{A.92})$$

dostáváme

$$0 = \xi_{k;i} + \xi_{i;k} , \quad (\text{A.93})$$

protože pro metrickou konexi kovariantní derivace složek metriky identicky vymizí.

Tvrzení 9 *Jestliže $X = \frac{d}{dt}$ je vektor tečný ke geodetice, pak pro každý Killingův vektor ξ je skalární součin $g(\xi, X)$ konstantní podél této geodetiky.*

Důkaz:

$$\frac{d}{dt} g(\xi, X) = (\xi_k X^k)_{;i} X^i = \xi_{k;i} X^i X^k + \xi_k X^k_{;i} X^i = 0 , \quad (\text{A.94})$$

protože první člen vymizí díky antisymetrii $\xi_{[k;i]}$ podle (A.93), a druhý člen podle rovnice geodetiky (A.68).

Literatura

- [1] Bhatnagar D., Gross E., Krook M., 1954: Phys. Rev. 94, 511
- [2] Castor J. I.: Radiation Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2004
- [3] Castor J. I., Abbot D. C., Klein R. I. 1975, ApJ 195, 157-174
- [4] Feynman R. P., Hibbs A. R.: Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York 1965
- [5] Kato S., Fukue J.: Fundamentals of Astrophysical Fluid Dynamics, Springer Nature Singapore 2020
- [6] Kracík J., Tobiáš J.: Fyzika plazmatu, Academia, Praha 1966
- [7] Kracík J., Šesták B., Aubrecht L.: Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu, Academia, Praha 1974
- [8] Mihalas D., Weibel-Mihalas B.: Foundations of Radiation Hydrodynamics, Oxford Univ. Press 1984, Dover Publications 1999
- [9] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.: Gravitation, Freeman & co., San Francisco 1973
- [10] Oxenius J.: Kinetic Theory of Particles and Photons (Springer Series in Electrophysics, vol. 20) Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo 1986
- [11] Price D. J., Wurster J. et al. (2017) arXiv:1702.03930
- [12] Rezzolla L., Zanotti O.: Relativistic Hydrodynamics, Oxford Univ. Press, Oxford 2013
- [13] Roache P. J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque 1976 (Mir, Moskva 1980)
- [14] Stewart J. M.: Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory (Lecture Notes in Physics 10), Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1971
- [15] Sturrock P. A.: Plasma Physics, Cambridge University Press 1994