

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM ...

Úloha č.:

Název:.....

Vypracoval:..... stud. sk. dne

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

Posuzoval: dne výsledek klasifikace

Připomínky:

Pracovní úkol

1. Odvod'te vztahy pro určení momentu setrvačnosti kola vzhledem k horizontální ose (tření zanedbejte):
 - a) metodou kyvů
 - b) metodou otáčení
2. Změřte moment setrvačnosti kola:
 - a) metodou kyvů
 - b) metodou otáčení, pro různé hodnoty r
3. Určete moment třecích sil M_t a moment setrvačnosti kola J_k korigovaný na nulovou hodnotu tření.
4. Graficky znázorněte závislost nekorigovaného momentu J^* na parametru d .

Teoretický úvod

Metoda kyvů

Moment setrvačnosti tělesa lze určit z doby kmitu T . Kolo zavěsíme tak, aby se mohlo volně otáčet kolem vodorovné osy. Na obvod kola umístíme malé závaží hmotnosti m . Vychýlíme-li kolo z rovnovážné polohy, začne systém kmitat kolem rovnovážné polohy. Zanedbáme-li tření, můžeme pro malé výchylky pro moment setrvačnosti kola odvodit závislost na hmotnosti závažíčka a vzdálenosti závažíčka od osy otáčení.

Považujme soustavu za fyzické kyvadlo. Pak pro něj platí 2. impulsová věta, kterou můžeme psát ve tvaru:

$$\frac{db}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = M,$$

kde J je moment setrvačnosti fyzického kyvadla, m hmotnost kyvadla, b moment hybnosti systému, ω úhlová rychlost otáčení v daném okamžiku a M je moment vnějších sil.

Moment M vytváří tíhové pole, proto má vztah pro malé výchylky φ ($\sin\varphi \approx \varphi$) tvar:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi,$$

kde l je délka závěsu kyvadla.

Získáme ze vztahu dobu kmitu ze vzatu vypočítáme moment setrvačnosti J .

$$J = \frac{T^2 mgl}{4\pi^2}$$

Podrobnosti odvozování vztahu pro fyzické kyvadlo v [L3].

Ovšem v našem případě je fyzickým kyvadlem kolo navíc ještě s tělesem o hmotnosti m , které k celkovému momentu setrvačnosti systému přispívá svým vlastním momentem J_0 vzhledem k ose otáčení, který je dán vztahem:

$$J_0 = ml^2$$

Moment setrvačnosti systému musíme tedy o moment setrvačnosti tělesa opravit a dostáváme se k výslednému vztahu:

$$J = ml\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l\right) \quad [\text{R1}]$$

Měření se v tomto případě redukuje na měření hmotnosti m tělesa, měření vzdálenosti l těžiště tělesa od osy otáčení a ve změření doby kmitu T .

Chybu momentu setrvačnosti určíme podle principu přenosu chyb ve funčních závislostech, pro náš případ platí pro určení chyby momentu setrvačnosti J vztah:

$$\sigma_J^2 = \left(l\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l\right)\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mgT^2}{4\pi^2} - 2ml\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{mgl2T}{4\pi^2}\right)^2 \sigma_T^2 \quad [\text{R2}],$$

kde σ_i jsou disperze měření jednotlivých veličin.

Metoda otáčení

K tomuto účelu jsou na kolo připevněny souosé kladky, jejichž poloměr je r . Pokud na kladku navineme vlákno a na jeho konec zavěšíme závaží známé hmotnosti m , bude moment síly M dán součinem síly tahové přenášené vláknem a poloměru kladky r . Protože moment setrvačnosti J celého zařízení vůči ose je za pohybu stálý (platí 2. impulsová věta), lze pohybovou rovnici systému napsat ve tvaru:

$$J\varepsilon = rm(g - a),$$

kde ε je úhlové zrychlení otáčení, a je zrychlení, jakým se pohybuje závaží m směrem dolů a g gravitační zrychlení. Zrychlení a souvisí se zrychlením ε vztahem $a = r\varepsilon$.

Pro moment setrvačnosti kola pak platí vztah:

$$J = rm\left(\frac{g}{\varepsilon} - r\right) \quad [\text{R3}]$$

Podrobnosti odvození v [L2].

Takto získaný moment setrvačnosti je momentem teoretickým, v kterém se neuvažuje tření v systému. Předpokládáme-li, že tření podstatně nezávisí na rychlosti otáčení kola, můžeme jej charakterizovat momentem třecích sil M_T . Vztah pro moment setrvačnosti kola J_k se pak upraví na vztah:

$$J_k = mr^2 \left(\frac{g}{r\varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon} M_T$$

Zavedeme-li pro nekorigovaný moment setrvačnosti určený podle vztahy [R2] označení:

$$J^* = mr^2 \left(\frac{g}{r\varepsilon} - 1 \right),$$

můžeme vztah mezi nekorigovaným momentem J^* a skutečným momentem setrvačnosti kola J_k přepsat na tvar:

$$J^* = J_k + \frac{1}{\varepsilon} M_T \quad [Z1]$$

Měření se tedy redukuje na měření hmotnosti závaží m , měření poloměru kladky r a měření úhlového zrychlení ε , k němuž je použito počítače (viz [L1]). Hodnotu g použijeme z tabulek [L4]. Vypočítáme nekorigovaný moment setrvačnosti soustavy J^* a konstanty J_k a M_T určíme z regresní analýzy.

Pro výpočet chyby nekorigovaného momentu setrvačnosti použijeme principu přenosu chyb, jehož důsledkem je vztah:

$$\sigma_J^2 = \left(\frac{mg}{\varepsilon} - 2mr \right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{rg}{\varepsilon} - r^2 \right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mrg}{\varepsilon^2} \right)^2 \sigma_\varepsilon^2 \quad [R4]$$

Výsledky měření

Metoda kyvů

K měření jsem použil jedno závažíčko, jehož hmotnost m jsem změřil na rovnoramenných vahách a chybu stanovil odhadem (možnou chybu vah zanedbávám, protože je jistě mnohem menší než chyba způsobená nedostatkem jemnějších závažíček). K stanovení momentu setrvačnosti je zapotřebí ještě určit vzdálenost l závažíčka od osy otáčení, chybu jsem stanovil jednak statisticky opakovaným měřením, kterou jsem pak spojil s chybou stanovenou odhadem na hladině 3σ . Měření periody kmitu jsem převedl na měření periody deseti kmitů, v důsledku čehož jsem snížil o řád chybu, způsobenou mou reakcí (přesnost stopek neuvažuji, protože je vůči chybě způsobené reakční prodlevou zanedbatelná). Chybu reakční (odhadem) jsem pak spojil s chybou statistickou. Podrobnosti o metodě měření v [L1]. Mezivýsledky shrnuje tabulka [T1].

Moment setrvačnosti kola změřený metodou kyvů je tedy:

$$\mathbf{J} = (0,043 \pm 0,001) \text{ kgm}^2$$

Metoda otáčení

K měření jsem použil pět různých závažíček (jejich hmotnosti jsem měřil na rovnoramenných vahách a chybu stanovoval stejně jako v případě metody kyvů) a čtyři kladky různých průměru (ty jsem v případě dvou nejmenších kladek měřil posuvným

měřítkem s noniem, v případě největších dvou kladek jsem měřil jejich obvod provázkem a následně průměr vypočítal; chybu v obou případech stanovuji odhadem s ohledem na podmínky měření - viz část *Diskuse*). Úhlové zrychlení za mne změří a vypočítá počítač. Výsledky a mezivýpočty měření metodou otáčení shrnuje tabulka [T2].

Moment setrvačnosti kola je tedy určen několika nezávislými měřeními s vlastními chybami. Proto pro určení korigovaného momentu setrvačnosti používám váženou lineární regresi podle vztahu [Z1]. Pomocí statistických výpočtů získáme pro korigovaný moment setrvačnosti výsledek:

$$J_k = (0,0421 \pm 0,0005) \text{ kgm}^2$$

Výsledky regresní analýzy vystihuje graf [G1].

Bližší informace o regresní analýze v [L2].

Diskuse

Hodnota momentu setrvačnosti kola určená oběma metodami je téměř stejná (v rámci chyby se obě hodnoty dokonce překrývají). Přitom ale hodnota určená metodou kyvů je mírně vyšší - je to způsobeno tím, že v tomto případě neodečítáme tření kola v ložiskách, zatímco v případě metody otáčení jsme se tření pokusili na základě modelu statisticky odbourat.

Zdroje chyb:

* největším zdrojem chyb bylo v případě metody kyvů bezpochyby určování délky l ramene. Už kvůli tomu, že měřením buď nezískáme přímo vzdálenost těžiště kuličky od osy otáčení, nebo je určování této vzdálenosti zatíženo značnou chybou, vzniklou např. paralaxou, obtížným určováním polohy těžiště závažička a středu osy. Dalším zdrojem nepřesnosti je měření stopkami - na té se podepisuje nejenom reakční doba, ale i obtížné určování přesného okamžiku průchodu závažička zvoleným bodem.

* naproti tomu z hlediska používaných postupů a měřidel je metoda otáčení zatížena chybami podstatně méně. O to je náročnější zpracování jejich výsledků. Největším zdrojem chyb při měření je beze sporu měření průměru (poloměru) kladky. U dvou nejmenších kladek lze použít přímé měření posuvným měřítkem s celkem malou chybou, u dvou větších je ovšem nutné odečíst od naměřené hodnoty ještě hloubku zářezu na provázek. Proto jsem v tomto případě zvolil metodu jinou - měření obvodu kladky pomocí provázku a následně výpočet průměru (poloměru). Nicméně provázek podléhá při namotávání pružné deformaci, tudíž chyba měření obvodu může být řádově i v milimetrech. Avšak díky jejímu dělení 2π je chyba průměru (poloměru) nižší.

Závěr

Moment setrvačnosti kola lze měřit v zásadě dvěma způsoby, přičemž oba dávají pro

dané kolo přibližně tytéž hodnoty.

Použitá literatura

- [L1] Slavínká D., Stulíková I., Vostrý P. - Fyzikální praktikum I.
- [L2] Brož J. a kol. - Základy fyzikálních měření I.
- [L3] Havránek A. - Mechanika I.
- [L4] Mikulčák J. a kol. - Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro SŠ

