

• hmotnost závažíček. Při odečítání se musí počkat, až se kmity dostatečně utlumí.

Závěr

Modul pružnosti v tahu, který je jednou z charakteristik materiálu, lze měřit dvěma odlišnými metodami, které dávají pro stejný materiál přibližně stejné hodnoty. Ukázali jsme, že závislost prodloužení drátu a průhybu trámku na působící síle je lineární.

Použitá literatura

- [L1] Slavínská D., Stulíková I., Vostrý P. - Fyzikální praktikum I.
- [L2] Brož J. a kol. - Základy fyzikálních měření I.
- [L3] Mikulčák J. a kol. - Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro SŠ

Modul pružnosti v tahu: $E = (200 \pm 17) \times 10^9 \text{ Pa}$

Změřená hodnota se přibližuje tabelované hodnotě ([L3] udává hodnotu 200 GPa bez uvedení chyby), ale nerovná se jí ani v rámci chyby. Nicméně v případě, že by byla tabelovaná hodnota uvedena s chybou, lze očekávat, že by se oba intervaly nejistot překryly.

Graficky znázorňuje závislost průhybu v ocelového trámku na působící síle F graf [G2].

2. trámek

Pro druhý trámek (který by měl být z duralu) provedeme měření i výpočet analogickým způsobem. Podrobnosti shrnuje tabulka [T7]. Pro duralový trámek byly získány následující hodnoty.

$$\text{Šířka trámku: } a = (11,34 \pm 0,06) \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{Tloušťka trámku: } b = (2,916 \pm 0,006) \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{Vzdálenost mezi břity: } l = (41,0 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{Průhyb trámku: } v = (0,88 \pm 0,01) \times 10^{-3} \text{ m}$$

Modul pružnosti v tahu: $E = (68 \pm 4) \times 10^9 \text{ Pa}$

Změřená hodnota odpovídá v rámci chyby tabelované hodnotě ([L3] udává hodnotu 72 GPa bez uvedení chyby).

Graficky znázorňuje závislost průhybu v duralového trámku na působící síle F graf [G3].

Diskuse

Zdroje chyb

Určení modulu pružnosti v tahu z protažení drátu:

- Největším zdrojem chyb (a také zdroj největších relativních chyb, které se pak také ve výsledném efektu přenosu chyb nejvíce projeví) je odečítání dílků stupnice v dalekohledu. Relativní chyby pro prodloužení l pak činí v důsledku toho 12%, což je také relativní chyba určení modulu pružnosti v tahu. Řešením by mohla být jemnější stupnice a zrcátko dále od stupnice.
- Dalším zdrojem nepřesností se projeví také při odečítání dílků ze stupnice v dalekohledu a je to málo stabilní umístění aparatury. Díky tomu se sebemenší pohyb v okolí měřícího stanoviště projeví chvěním obrazu v dalekohledu a je nutno čekat na ustálení, nebo se pokusit odhadnout střední polohu kmitů.
- Nejistoty měření ostatních veličin se na výsledné chybě měření zmatelně neprojeví.

Určení modulu pružnosti v tahu z průhybu trámku:

- Největším zdrojem chyb podobně jako v předchozím měření je odečítání dílků stupnice v objektivovém mikrometru. Ze stejného důvodu - aparatura je citlivá na otřesy.
- Po každém přidání závažíčka má systém tendenci kmitat a to tím větší, čím větší

Nyní již můžeme vypočítat modul pružnosti v tahu a jeho chybu ze vztahů [R1] a [R2]. Pro výpočet chyby neuvažujeme nepřesnost určení hmotnosti m závaží (převážením jsem relativní chybu hmotnosti stanovil menší než 1%). Chybu konstant též neuvažuju, z důvodů uvedených již v teoretické části.

Modul pružnosti v tahu: $E = (197 \pm 25) \times 10^9 \text{ Pa}$

Pro porovnání - tabelovaná hodnota modulu pružnosti v tahu (viz [L3]) je pro ocel 220 GPa bez uvedení chyby. Je tedy vidět, že naměřená hodnota v rámci chyby souhlasí s hodnotou tabelovanou.

Graficky znázorňuje závislost prodloužení Δl na působící síle F graf [G1].

Určení modulu pružnosti v tahu z průhybu trámku

Pro určení modulu pružnosti v tahu z průhybu trámku je zapotřebí nejprve změřit parametry obou trámků, které máme k dispozici.

1. trámek

Šířku trámku a měříme posuvným měřítkem a měření opakujeme na více místech. Výsledkem jsou dvě chyby (statistická a odhadem), které po spojení dávají výsledek (měření shrnuje tabulka [T4]):

Šířka trámku: $a = (11,92 \pm 0,09) \times 10^{-3} \text{ m}$

Tloušťku trámku b měříme mikrometrem a měření opět opakujeme na více místech. Výsledkem jsou podobně jako v předchozím případě dvě chyby, a chybu celkovou vypočítáme stejným způsobem (měření shrnuje tabulka [T5]).

Tloušťka trámku: $b = (2,974 \pm 0,006) \times 10^{-3} \text{ m}$

K měření je zapotřebí ještě zjistit vzdálenost břitů l , které trámek podepírají. Vzdálenost břitů měříme pásovým měřítkem, chybu bychom měli stanovit odhadem na hladině 3σ . Ale vzhledem k tendenci pásového měřítka prohýbat se a dosti velké vzdálenosti obou břitů, určíme chybu svým vlastním odhadem na hladině σ .

Vzdálenost mezi břity: $l = (41,0 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$

Průhyb v při položení elementárního závaží hmotnosti m určíme metodou postupnou a využijeme k tomu měření při přidávání i při odebrání závaží. K statistické chybě připočteme ještě chybu měření odhadem, kterou jsem určil **0,05 mm** na hladině 3σ . Podrobnosti o měření a částečně i mezivýsledky a postupy shrnuje tabulka [T6].

Průhyb trámku: $v = (0,27 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ m}$

Nyní již můžeme vypočítat modul pružnosti v tahu a jeho chybu podle vztahů [R3] a [R7]. Podobně jako při měření z protažení drátu ani zde neuvažujeme chybu hmotnosti m přivěšovaných závaží nebo chybu fyzikálních konstant jako například g .

Výsledná nejistota měření prodloužení Δl bude pak dána spojením obou chyb - chyby statistické a chyby způsobené přenosem (vztahy [R7] a [R10]). Tedy:

$$\sigma_{\Delta l} = \sqrt{\sigma_{\Delta l,s}^2 + \sigma_{\Delta l,p}^2} \quad [\text{R11}]$$

Podobně při měření průhybu trámku stanovíme ještě navíc chybu měření odhadem na hladině 3σ , která závisí na použité stupnici. Obě chyby pak spojíme podobně jako při spojování dvou chyb při měření protažení drátu.

Další podrobnosti o metodě měření v [L1] a o metodě zpracování měření v [L2].

Výsledky měření

Určení modulu pružnosti v tahu z protažení drátu

Pro výpočet je zapotřebí nejprve určit parametry drátu a vlastnosti optické soustavy zrcátka v stupnici. Průměr drátu měříme mikrometrem, chybu měření stanovujeme jednak odhadem a pak ještě statistickou chybou z více provedených měření na více místech (měření shrnuje tabulka [T1]).

$$\text{Průměr drátu: } d = (0,508 \pm 0,005) \times 10^{-3} \text{ m}$$

Délku drátu měříme pásovým měřítkem a chybu stanovujeme odhadem s ohledem na okolnosti měření. Vzhledem k tomu, že pásové měřítko je náchylné k ohýbání a na měření vzdálenosti by se to mohlo již celkem znatelně projevit, stanovil jsem chybu dle své úvahy na 2 mm na hladině σ .

$$\text{Délka drátu: } l_0 = (113,8 \pm 0,2) \times 10^{-2} \text{ m}$$

Poloměr kladky měříme posuvným měřítkem tak, že změříme průměr a získané hodnoty včetně chyby stanovené odhadem na hladině 3σ dělíme dvěma. K chybě ještě připočteme chybu statistickou z více měření na více místech (kvůli možným odchýlkám od kruhového tvaru - měření shrnuje tabulka [T2]).

$$\text{Poloměr kladky: } r = (19,22 \pm 0,03) \times 10^{-3} \text{ m}$$

Vzdálenost osy kladky od stupnice měříme posuvným měřítkem a chybu stanovujeme podobně jako při měření délky drátu.

$$\text{Vzdálenost klady od stupnice: } L = (70,5 \pm 0,2) \times 10^{-2} \text{ m}$$

Nejpravděpodobnější protažení drátu při zavěšení jednoho závaží o hmotnosti m vypočítáme metodou postupných měření (vztahy [R5] a [R9]), k určení jeho chyby použijeme vztah [R11], jeho určení ještě potřebujeme znát chybu odečítání dílků ze stupnice v dalekohledu, kterou jsem stanovil odhadem na hodnotu **0,5 mm** na hladině 3σ . Měření a částečně i postup výpočtu shrnuje tabulka [T3].

$$\text{Nejpravděpodobnější protažení drátu: } \Delta l = (28 \pm 4) \times 10^{-6} \text{ m}$$

Stejně jako v předchozím případě se chyba měření stanovuje na základě principu přenosu chyb ve funkčních závislostech a je dána vztahem (se stejným zanedbáním chyb konstant):

$$\sigma_E = E \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{m^2} + 9 \frac{\sigma_l^2}{l^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2} + \frac{\sigma_a^2}{a^2} + 9 \frac{\sigma_b^2}{b^2}} \quad [\text{R4}]$$

Relativní prodloužení drátu Δl a průhyb trámku v zpracováváme *metodou postupnou*. To znamená, že předpokládáme, že závislost prodloužení na působící síle bude lineární (a to podle Hookova zákona v oblasti pružné deformace bude). Získaný soubor n měření rozdělíme na dvě stejně početné části; v každé části bude $k=n/2$ naměřených hodnot. Rozdíly naměřených hodnot l (l je celkové prodloužení drátu oproti délce bez zatížení) bereme mezi hodnotami téhož pořadí v obou skupinách (to znamená mezi prvním prvkem první skupiny a prvním prvkem druhé skupiny...). Získáme tak k rozdílů. Nejpravděpodobnější hodnota tohoto rozdílu pak bude dána vztahem:

$$\bar{\Delta l} = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=k+1}^n l_i - \sum_{i=1}^k l_i \right) \quad [\text{R5}] \text{ resp.}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=k+1}^n v_i - \sum_{i=1}^k v_i \right) \quad [\text{R6}]$$

Statistickou chybu takto určené veličiny vypočítáme stejně jako chybu měření jediné veličiny. Tedy:

$$\sigma_{\Delta l, s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (k \bar{\Delta l} - (l_i - l_{i+k}))^2 \quad [\text{R7}] \text{ resp.}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (k \bar{v} - (v_i - v_{i+k}))^2 \quad [\text{R8}]$$

Každá veličina l_i bude dána vztahem:

$$l_i = \frac{r}{2L} |n_i - n_0| \quad [\text{R9}],$$

kde r je poloměr kladky, L je vzdálenost kladky od stupnice, n_0 je hodnota na dílku stupnice nezatíženého drátu a n_i je hodnota dílku stupnice daného měření.

Do chyby protažení drátu se však promítnou i nejistoty měření dílčích veličin. Tudiž chyba způsobená přenosem bude dána principem přenosu chyby ve funkčních závislostech a bude dána vzorcem:

$$\sigma_{\Delta l, p} = \Delta l \sqrt{\frac{\sigma_r^2}{r^2} + \frac{\sigma_L^2}{L^2} + \frac{2\sigma_n^2}{(n - n_0)^2}} \quad [\text{R10}]$$

úhel bude velmi malý, takže lze přiřadit přímo velikost úhlu), je pootočení α dáno vztahem:

$$\alpha = \frac{n - n_0}{2L},$$

kde L je vzdálenost stupnice od zrcátka.

Výsledný vztah pro modul pružnosti v tahu má tedy tvar:

$$E = \frac{4l_0 mg}{\pi d^2 \Delta l} \quad [\text{R1}]$$

Protože jsou proměnné veličiny ve vztahu [R1] jsou známy s určitou nejistotou (nebudeme uvažovat nepřesnost tíhového zrychlení a jako g vezmeme hodnotu $g=9,81 \text{ m/s}^2$, možná chyba, kterou můžeme udělat jeho zápisem v tomto tvaru je zanedbatelná vůči chybám veličin, které ve vztahu jinak vystupují; stejný postup provedeme s i konstantou π , za níž vezmeme hodnotu $\pi=3,141$), bude pro výpočet chyby modulu pružnosti v tahu σ_E platit podle principu přenosu chyb ve funkčních závislostech ([L2]) vztah:

$$\sigma_E = E \sqrt{\frac{\sigma_{l_0}^2}{l_0^2} + \frac{\sigma_m^2}{m^2} + 4 \frac{\sigma_d^2}{d^2} + \frac{\sigma_{\Delta l}^2}{\Delta l^2}} \quad [\text{R2}],$$

kde jednotlivá σ_i jsou disperze měření jednotlivých veličin.

Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu trámku

Modul pružnosti E lze určovat i metodami nepřímými, např. z velikosti průhybu tyčí (např. trámku s obdélníkovým průřezem, podepřeného dvěma břity ve vzdálenosti l). Při zatížení uprostřed silou F se trámek prohne o průhyb v , který je dán vztahem:

$$v = \frac{Fl^3}{48EJ_p},$$

kde J_p je plošný moment setrvačnosti průřezové plochy tyče vzhledem k vodorovné ose kolmé k délce trámku a procházející těžištěm. Pro tento moment platí vztah:

$$J_p = \frac{ab^3}{12},$$

kde a je šířka trámku a b je délka trámku. Síla F je tíhovou silou závaží položeného na trámek a je dána vztahem:

$$F = mg$$

Složením předchozích vztahů získáme pro výpočet modulu pružnosti v tahu E rovnici:

$$E = \frac{ml^3 g}{4vab^3} \quad [\text{R3}]$$

Pracovní úkol

1. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z průhybu trámku.
3. Výsledky měření zpracujte metodou postupných měření.
4. Výsledky měření graficky znázorněte.

Teoretický úvod

Měření modulu pružnosti v tahu z protažení drátu

Působí-li na drát délky l_0 o průřezu S síla F , potom v oboru pružné deformace (který je dán vlastnostmi materiálu) je prodloužení drátu úměrné působící síle a počáteční délce drátu a nepřímo úměrné průřezu drátu. Splňuje tedy vztah:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S}$$

, kde E je modul pružnosti v tahu. Modul pružnosti v tahu udává poměr mezi normálovým napětím σ a relativním prodloužením ε . A protože

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{a} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} ,$$

lze vztah pro výpočet modulu pružnosti v tahu napsat ve tvaru:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{l_0 F}{\Delta l S}$$

Pro určení modulu pružnosti v tahu tedy stačí změřit původní délku l_0 , průměr drátu d (a vypočítat jeho průřez S), prodloužení Δl a sílu F , která způsobí deformaci a která je silou tíhovou danou vztahem:

$$F = mg ,$$

kde m je hmotnost zavěšených závažíček a g tíhové zrychlení.

Protože je prodloužení záležitostí velmi malou, měříme jej *zrcátkovou metodou*. Drát je veden přes kladku poloměru r a protažení drátu se převádí na pootočení zrcátka. Pootočení zrcátka o úhel α souvisí s prodloužením drátu vztahem:

$$r\alpha = \Delta l$$

a měří se metodou zrcátka a stupnice (podrobnosti v [L1]). N stupnici tak získáme dva body - n_0 a n , které charakterizují začátek a konec jevu. Při zanedbání tangenty úhlu (protože

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM ...

Úloha č.:

Název:.....

Vypracoval:..... stud. sk. dne

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

Posuzoval: dne výsledek klasifikace

Připomínky: