Kabinet výuky obecné fyziky MFF UK

Fyzikální praktikum............

Úloha č.:............................

Název.:...

Měřil.:..dne:...

odevzdal dne:....................................vráceno:..

odevzdal dne:....................................vráceno:..

odevzdal dne:...

Posuzoval:.....................................dne:...

Výsledek klasifikace:...

Připomínky:

Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
2. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

Teoretický úvod

V tíhovém poli můžeme nechat kývat libovolné těleso kolem osy, která neprochází jeho těžištěm, jako *fyzické kyvadlo*. Jeho doba kmitu je pak pro každé takové těleso dána vztahem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\,[1 + \tfrac{1}{4}\sin^2(\tfrac{\alpha}{2})], \quad [R1]$$

kde I je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení, m je hmotnost kyvadla, g je místní tíhové zrychlení, l je vzdálenost od osy otáčení, α je maximální úhlová výchylka z rovnovážné polohy.

<u>Metoda matematického kyvadla</u>

Matematickým kyvadlem se rozumí hmotný bod hmotnosti m zavěšený na jednom konci nehmotného závěsu délky l, volně otáčivého kolem osy, která prochází druhým koncem závěsu. Moment setrvačnosti takového bodu je pak.

$$I_0 = ml^2 \quad [R2]$$

Dobu kmitu určíme spojením rovnic [R1] a [R1]. Při omezení se na malé výchylky (člen rovnice [R1] s goniometrickou funkcí považujeme za nulu) můžeme pak místní tíhové zrychlení vypočítat ze vztahu:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_M^2}, \quad [R3]$$

kde T_M je perioda kmitu matematického kyvadla.

Chyba tako určeného tíhového zrychlení bude dána principem přenosu chyb ve funkčních závislostech (viz [L2]) a bude se počítat podle vzorce:

$$\sigma_g = g\sqrt{\frac{\sigma_l^2}{l^2} + 4\frac{\sigma_{T_M}^2}{T_M^2}}, \quad [R4]$$

kde σ_i jsou disperze jednotlivých veličin.

Podmínkám matematického kyvalda se můžeme přiblížit při měření doby kmitu těžké koule na tenkém vlákně při malých rozkmitech.

Pro tomto způsobu měření se ale dopouštíme řady zanedbání. Abychom mohli vypočítat chybu takto způsobenou, potřebujeme vyjádřit skutečný moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení.

Moment setrvačnosti homogenní koule poloměru r kolem osy procházející těžištěm:

$$I_{0,koule} = \tfrac{2}{5}mr^2$$

Moment setrvačnosti tyče délky *L* vzhledem k ose kolmé k délce tyče a procházející těžištěm:

$$I_{0,tyè} = \frac{1}{12} m L^2 .$$

Moment setrvačnosti tělesa vůči libovolné ose je dán *Steinerovou větou*.

$$I = I_0 + m a^2 ,$$

kde *I* je moment setrvačnosti vzhledem k požadované ose, I_0 je známý moment setrvačnosti podle nějaké osy (například procházející těžištěm), *m* je hmotnost soustředěná v těžišti a *a* je vzdálenost obou os.

Celkový moment setrvačnosti koule zavěšené na niti je dán vztahem:

$$I = m(\tfrac{2}{5} r^2 + l^2) + \tfrac{1}{3} m_p (l - l_z - r)^2 , \quad \text{[R5]}$$

kde *m* je hmotnost koule, *r* je poloměr koule, *l* je vzdálenost těžiště koule od osy otáčení, m_p je hmotnost provázku, l_z je délka háčku. I přesto se dopouštíme jedné nepřesnosti, když neuvažujeme příspěvek momentu setrvačnosti závěsu. Je totiž nesmírně obtížné zvážit zvlášť kouli a závěs, které jsou pro snazší průběh experimentu pevně spojeny.

Tíhové zrychlení pro malé výchylky bude po takové opravě určeno vztahem (spojení vztahů [R1] a [R5]):

$$g = \frac{4\pi^2 [m(\frac{2}{5} r^2 + l^2) + \frac{1}{3} m_p (l - l_z - r)^2]}{m T_M^2 l} \quad \text{[R6]}$$

Chyba takto určené veličiny bude dána principem přenosu chyb ve funkčních závislostech a bude přibližně rovna (pro poněkud složitější výrazy parciálních derivací podle některých proměnných):

$$\sigma_g \doteq g \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{\sigma_l^2}{l^2} + 4\frac{\sigma_r^2}{r^2} + \frac{\sigma_{mp}^2}{m_p^2} + \frac{\sigma_{lz}^2}{l_z^2} + 4\frac{\sigma_{T_M}^2}{T_M^2}} , \quad \text{[R7]}$$

kde σ_i jsou disperze jednotlivých veličin.

Zanedbáním úhlové výchylky se pro malé rozkmity dopouštíme velmi malých nepřesností. Pro maximální výchylku rovnou 5° se můžeme dopustit relativní chyby 0,2%. Pro výchylku 10° pak 0,8%, pro výchylku 20° pak 3%.

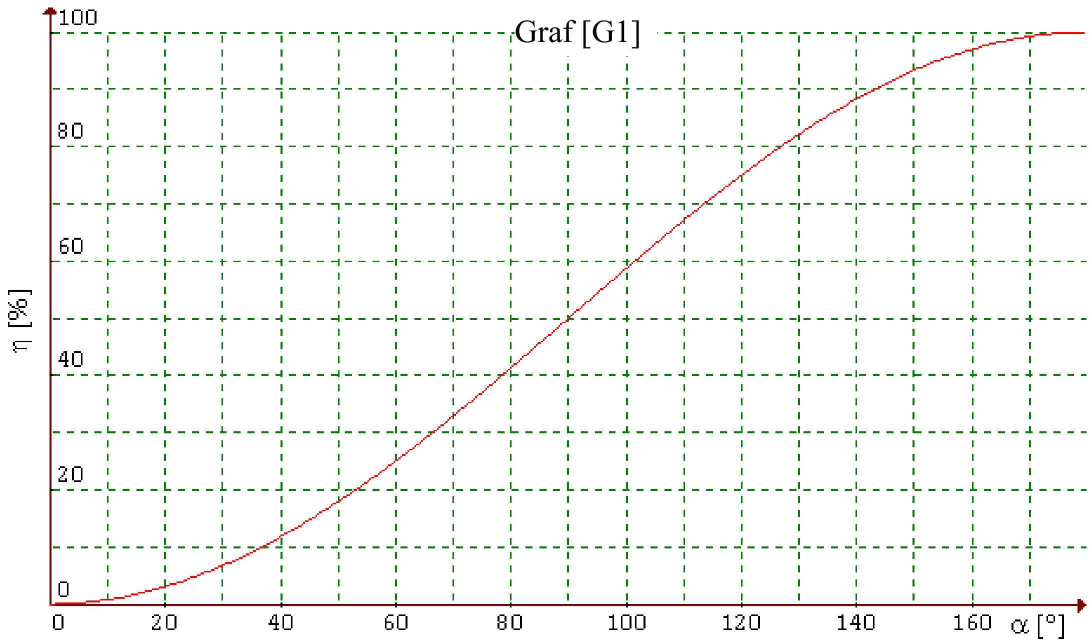
Jakých relativních chyb se při zanedbání tlumení dopouštíme pro výchylky znázorňuje graf [G1] (závislost relativní chyby určení tíhového zrychlení η na výchylce α):

<u>Metoda reverzního kyvadla</u>

Fyzické kyvadlo kývá se stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných os ležících v rovině, který prochází těžištěm kyvadla v případě, jsou-li obě osy od sebe vzdáleny o tzv. "*redukovanou délku kyvadla*". Pro dobu kmitu fyzického kyvadla pak platí pro malé rozkmity:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} ,$$

kde l_r je redukovaná délka kyvadla.



Reverzním kyvadlem je tyč se dvěma rovnoběžnými břity vzdálenými o vzdálenost *D*. Na jednom konci je upevněno kovové závaží, jehož polohu lze měnit. Tak lze dosáhnout toho, že kyvadlo kývá kolem obou břitů se stejnou dobou kmitu. Pak je vzdálenost břitů redukovanou délku kyvadla a tíhové zrychlení určíme podle rovnice:

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2} \qquad \text{[R8]}$$

Měření v praxi probíhá tak, že nastavíme polohu čočky a změříme periody kmitu kolem obou os. Toto provedeme ještě několikrát pro různé polohy závaží. Provedeme několik hrubých měření a uděláme si pracovní graf. Předpokládáme, že závislost doby kmitu na vzdálenosti závaží (od libovolného ale pevného bodu tyč) je přibližně lineární. V místě, kde se obě křivky (pro obě osy) sejdou, můžeme očekávat, že se doby kmitů podél obou os budou v rámci chyb rovnat. V tomto místě provedeme několik jemnějších nastavení vzdálenosti závaží tak, aby se obě doby kmitu k sobě maximálně přiblížili. Našli jsme periodu kmitu příslušnou redukované délce fyzického kyvadla.

Výsledky měření

***Místo měření**: Praha, Česká republika* ($\varphi \doteq 50^o$)

<u>Metoda matematického kyvadla</u>

Pro matematické kyvadlo (koule na provázku) byly získány následující hodnoty:

Hmotnost koule: m=(55,64±0,01)×10^{-3} kg

Poloměr koule: r=(11,68±0,05)×10^{-3} m

Hmotnost provázku: m_p=(0,0591±0,0001)×10^{-3} kg

Délka závěsu: l=(1022±2)×10^{-3} m

Délka háčku: l_z=(8,7±0,1)×10^{-3} m

Chyba hmotnosti byla stanovena jako polovina nejmenšího použitelného dostupného protizávažíčka, poloměru koule a délky háčku pak jako chyba odhadem použitého posuvného měřítka s noniem na hladině a hmotnosti provázku jako jednotka na posledním zobrazovaném desetinném místě digitálních vah (číslice na něm přeskakovaly právě v rozmezí ±1 od střední hodnoty). Chyba délky závěsu by měla být stanovena odhadem z vlastností použitého pásového měřítka, ale vzhledem k podmínkách měření a možnému prohnutí měřítka ji je nutné stanovit na vyšší hodnotu.

Dobu kmitu určujeme pomocí stopek přerušovaných průchodem kyvadla světelným paprskem dopadajícím na fotodiodu, při výpočtu chyby není potřeba uvažovat chybu přístroje samotného - je jistě menší, než chyba způsobená náhodnými faktory.

Naměřené hodnoty času periody shrnuje tabulka [T1].

Doba kmitu kyvadla: T_M=(2,0293±0,0004) s

Nyní již můžeme vypočítat tíhové zrychlení podle vztahů [R3], [R4] a [R6], [R7] vypočítat místní tíhové zrychlení.

Tíhové zrychlení v idealizaci mat. kyvadla: g=(9,797±0,0192) ms^{-2}

Tíhové zrychlení fyzickým kyvadlem: g=(9,801±0,127) ms^{-2}

Rozdíl obou středních hodnot je až na třetím desetinném místě a je roven:

Rozdíl středních hodnot: Δg=0,004 ms^{-2}

Takže pro naše účely a pro dané podmínky měření lze nahradit fyzické kyvadlo koule na provázku idealizací matematického kyvadla hmotného bodu na nehmotném závěsu.

<u>Metoda reverzního kyvadla</u>

Pro vzdálenost břitů, které jsou redukovanou délkou fyzického kyvadla pro danou periodu kmitu, byla získána hodnota:

Redukovaná délka fyz. kyvadla: l_r=(99,6±0,2)×10^{-2} m

Po nalezení periody kmitu, která se podél obou os přibližně rovná, změříme tuto periodu opakovaně.

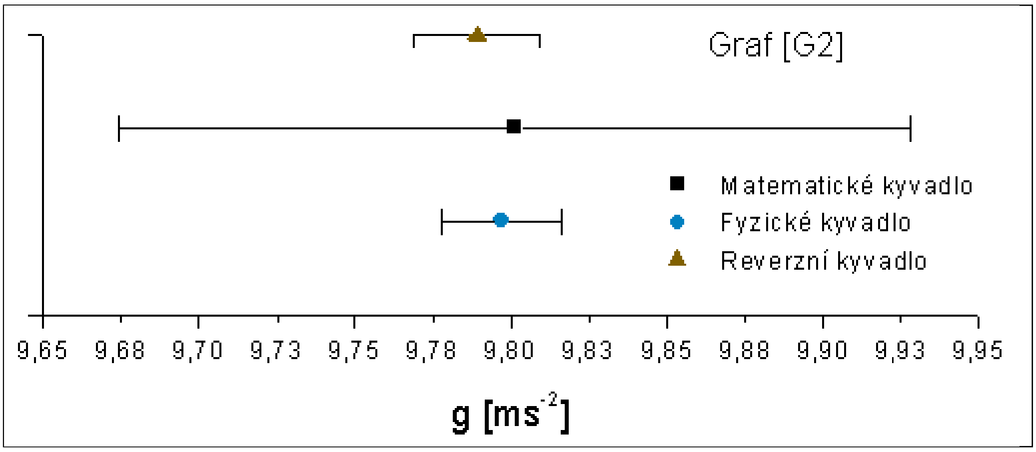
Měření shrnuje tabulka [T2].

Tíhové zrychlení reverzním kyvadlem: g=(9,789±0,020) ms^{-2}

Diskuse

Všechny metody dávají výsledky, které se v rámci svých chyb překrývají, jak ukazuje graf [G2].

Podle předpokladu, že při idealizaci matematického kyvadla nepřipočítáváme příspěvky provázku do momentu setrvačnosti soustavy a považujeme kouli za hmotný bod, je tíhové zrychlení idealizací matematického kyvadla menší, než při použití "přesnější" metody kyvadla fyzického. Rozdíly obou středních hodnot jsou opravdu pro naše účely zanedbatelné (na třetím desetinném místě, zatímco chyba měření se projeví v lepším případě již na druhém



desetinném místě). Chyba při použití kyvadla fyzického je znatelně větší, protože k ní přistupuje mnohem větší množství chyb dílčích veličin.

Jak bylo již uvedeno dříve, při počáteční výchylce 5° je relativní chyba určení tíhového zrychlení 0,2%. Jenže to je srovnatelné s relativní chybou změřeného tíhového zrychlení se zanedbáním rozkmitu. Z toho vyplývá, že při měření s malý rozkmitem (s výchylkou do 5°) lze nepřesnost způsobenou zanedbáním výchylky zanedbat (chyba takto získaná se projeví maximálně ve stejném řádu).

Naměřené hodnoty v rámci chyby souhlasí s hodnotou tabelovanou. Nemá příliš smysl ji srovnávat s přesnou hodnotou místního tíhového zrychlení, protože v rámci svých chybových intervalů s ní mají zcela jistě neprázdný průnik. Normální tíhové zrychlení (kterému je místní tíhové zrychlení v místě měření velmi blízké) je uváděno tabulkami [T3] na hodnotu $g_n = 9{,}80665\ ms^{-2}$ *přesně.*

Zdroje chyb

- největším zdrojem chyb především při měření metodou matematického kyvadla jsou otřesy aparatury - každý otřes má dosti znatelné pohybové účinky na kmitající kouli, které se pak projeví v naměřené hodnotě periody kmitu; v případě kyvadla reverzního se otřesy více projevují v případě, že se závaží nachází nad těžištěm, méně, když je závaží pod těžištěm
- metoda reverzního kyvadla je náročná na trpělivost a čas - v našem měření bylo potřeba provést 41 dvojic měření period pro různé polohy závaží na tyči, než se obě periody setkaly (tato pracovní měření nejsou zanesena v přiložených tabulkách, protože nemají pro experiment žádný výpočetní význam)
- chybu při měření periody kmitu také navyšuje fakt, že každé měření provádíme z mírně jiné výchylky.

Návrhy na zpřesnění měření

- stabilizovat aparaturu, zamezit vzniku otřesů
- na stojan přidělat po stranách zarážky, které by nastavily vždy stejnou počáteční výchylku - v případě známé vzdálenosti od svislice procházející osou otáčení kyvadla bychom se také zbavili zanedbání počáteční výchylky a měření by bylo alespoň metodicky přesnější

Závěr

Místní tíhové zrychlení lze měřit v zásadě třemi metodami - všechny dávají v rámci svých chyb překrývají (viz graf [G2]).

Shrnutí naměřených hodnot:

Matematické kyvadlo: $g=(9{,}797\pm0{,}019)\ ms^{-2}$

Fyzické kyvadlo: $g=(9{,}801\pm0{,}127)\ ms^{-2}$

Reverzní kyvadlo: $g=(9{,}789\pm0{,}020)\ ms^{-2}$

Použitá literatura

[L1] Slavínská D., Stulíková I., Vostrý P. - Fyzikální praktikum I.

[L2] Brož J. a kol. - Základy fyzikálních měření I.

[L3] Mikulčák J. a kol. - Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro SŠ

Poznámky:

- Všechny chyby (není-li uvedeno jinak) použité a vypočtené v tomto protokolu jsou chybami na hladině σ (střední kvadratické odchylky).
- Všechna tíhová zrychlení vypočítaná v tomto protokolu jsou i s chybou uvedena na tři desetinná místa hlavně z důvodů porovnávání, jaké hodnoty dávají které metody. Současně dokazují některé teoretické modely.