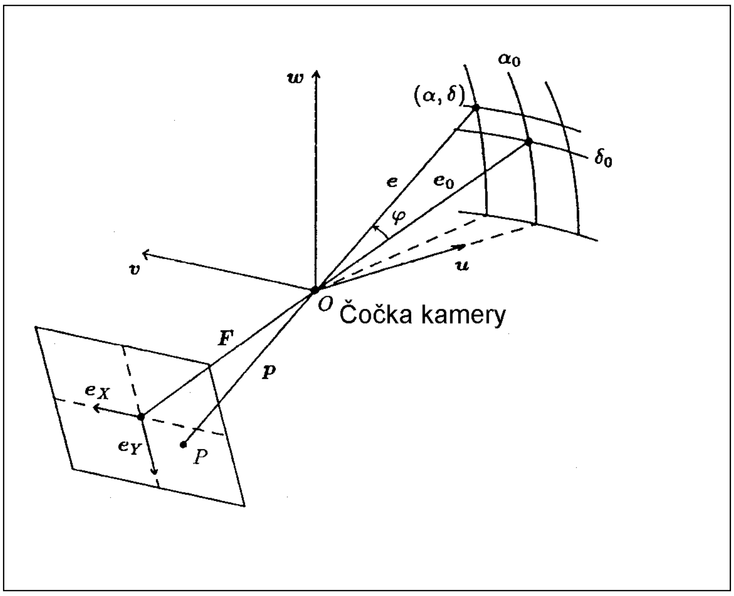
Astrometrie - základní princip

Astrometrie je disciplína astronomie, která se zabývá určováním poloh objektů na hvězdné obloze. V astronomii se používá několik souřadných systémů, vzhledem k určování souřadnic na nebeské sféře se budeme dále zabývat jen rovníkovými souřadnicemi, tedy rektascenzí a deklinací.

Praxe je taková, že se zvolí nějaký bod, v němž jsou obě souřadnice nulové (počátek souřadného systému) zvolí se směr, na nichž jsou souřadnice konstatní (osy) a polohu objektu vztahujeme k tomuto bodu. V zavedeném souřadném systému rektascenze/deklinace je nulovým bodem tzn. *jarní bod*, který je průsečíkem nebeského rovníku (zemský rovník přenesený na nebeskou sféru) a ekliptiky (vzdálené dráhy Slunce po obloze) a nachází se v současnosti v souhvězdí Ryb.

Nicméně nebeská klenba se neustále otáčí, takže nelze souřadnice jednoduše přímo přečíst. A např. čtení dělených kruhů na montáži dalekohledu by bylo možností, jak zjišťovat souřadnice přímo. Nicméně tím nelze dosáhnout příliš velké přesnosti.

Při zjišťování souřadnic se tedy používá jiné metody. Zvolí se vhodná referenční sít hvězd v okolí proměřovaného objektu, jejichž souřadnice již zjistil někdo před námi - použijeme některý z katalogů. Hvězdé pole pak vyfotografujeme (v dnešní době např. pomocí CCD) nebo proměříme přímo v dalekohledu (např. pomocí osvětleného záměrného kříže s mikrometrickým pohybem a stupnicí) a získáme tak polohu objektu a referenčních hvězd v jiných souřadnicích.



Zobrazení dané jednoduchým objektivem je vlastně gnomonickou projekcí do ohniskové roviny. Princip projekce ukazuje přiložený obrázek.

Nejdříve musíme získat vlastnosti projekce, tedy získat převodní funkci. To zjistíme na hvězdách, jejichž rovníkové souřadnice známe.

F je vzdálenost projekční desky od ohniskové roviny objektivu. Hvězda o souřadnicích α,β se zobrazí do bodu *P* v pozorovací rovině.

V ohniskové rovině můžeme definovat kartézský souřadnicový systém **u**, **v** a **w**. V něm

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0) \\ \cos\delta\sin(\alpha-\alpha_0) \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

je směr ke hvězdě o rektascenzi α a deklinaci δ. Podobně

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} \cos\delta_0 \\ 0 \\ \sin\delta_0 \end{pmatrix}$$

definuje bod o souřadnicích α_0, δ_0, na který kamera pointuje.

Vektory $\mathbf{F} = -F.\mathbf{e}_0$ a $\mathbf{p} = -p.\mathbf{e}$ popisují cestu paprsku od objektivu kamery ke středu desky a k obrazu hvězdy *P*. Ty svírají úhel φ, kde platí:

$$\cos\varphi = \mathbf{e}_0.\mathbf{e} = \cos\delta_0\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0) + \sin\delta_0\sin\delta$$

Vektory

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} \sin\delta_0 \\ 0 \\ -\cos\delta_0 \end{pmatrix}$$

Pak definují souřadnicový systém, podle kterého pak proměřujeme na desce, která je orientována ve směru sever-jih a východ-západ. Pokud měříme souřadnice X a Y bodu P v jednotkách ohniskové vzdálenosti F, $\mathbf{p}$ může vypadat například takto:

$$\mathbf{p} = \mathbf{F} + (F.X).\mathbf{e}_x + (F.Y).\mathbf{e}_y$$

Tuto rovnici můžeme rozepsat do jednotlivých složek v závislosti na rovníkových souřadnicích (α,δ). Získáme tedy tři rovnice.

$$p.\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0) = F\cos\delta_0 - FY\sin\delta_0$$
$$p.\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_0) = -FX$$
$$p.\sin\delta = F\sin\delta_0 + FY\cos\delta_0,$$
$$\text{kde } p = |\mathbf{p}| = F\sqrt{1+X^2+Y^2}$$

Tyto rovnice můžeme vyřešit a pro rovníkové souřadnice dostaneme:

$$\alpha = \alpha_0 + \arctan\left(\frac{-X}{\cos\delta_0 - Y\sin\delta_0}\right) \quad [1]$$
$$\delta = \arcsin\left(\frac{\sin\delta_0 + Y\cos\delta_0}{\sqrt{1+X^2+Y^2}}\right) \quad [2]$$

Obrácením vztahů dostaneme:

$$X = -\frac{\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_0)}{\cos\delta_0\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0)+\sin\delta_0\sin\delta} \quad [3]$$

a

$$Y = -\frac{\sin\delta_0\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0)-\cos\delta_0\sin\delta}{\cos\delta_0\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0)+\sin\delta_0\sin\delta} \quad [4]$$

Bezrozměrné souřadnice X a Y jsou popsány standardními souřadnicemi, protože z definice nazávisí na ohniskové délce optického systému kamery. My ve skutečnosti na desce měříme souřadnice x a y, pro něž platí:

$$X = x/F \text{ a } Y = y/F$$

Obecně však počátek souřadnicového systému v ohniskové rovině nemusí totožný s průsečíkem optické osy a desky. Potom je třeba rovnice upravit na tvar, kde Δx a Δy jsou posuny jednotlivých os souřadnic:

$$X = x/F - \Delta x/F \text{ a } Y = y/F - \Delta y/F$$

Avšak osy souřadnic na desce nemusí být ještě ve směru sever-jih, východ-západ. Do zobrazení musíme započítat pootočení souřadného systému γ. Rovnice pak nabývají tvaru:

$$X = (x\cos\gamma - y\sin\gamma)/F - \Delta x/F \text{ a } Y = (x\sin\gamma + y\cos\gamma)/F - \Delta y - F$$

Nás ale nezajímají posuny a otočení souřadnic, které jsou na celé desce konstantní, my potřebujeme znát tranformační rovnici v co možná nejjednodušším tvaru. Protože je tedy i úhle otočení i posun počátku soustavy souřadnic na celé desce konstantní, můžeme obě rovnice opravit na již vcelku dobře řešitelný tvar:

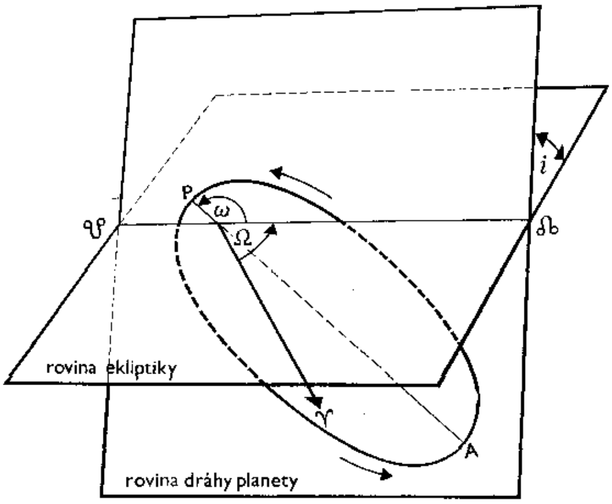
$$X = a.x + b.y + c \text{ a } Y = d.x + e.y + f \quad [5, 6]$$

Těchto rovnic dostaneme tolik, kolik budeme proměřovat hvězd na desce. Mnohý uvěří tomu, že je zapotřebí proměřit alespon tři hvězdy, abychom mohli určit konstanty a, b, c, d, e a f bez nutnosti dalších předpokladů.

Určení rovníkových souřadnic se tedy "redukuje" na výpočet souřadnic X a Y pro alespoň tři hvězdy podle rovnic [3] a [4], změření jejích skutečných souřadnic na desce x a y a výpočet konstant v rovnicích [5] a [6]. Pokud již známe tyto konstanty jednoznačně (při proměřování více hvězd používáme k určení konstant metodu nejmenších čtverců), není problém již ze změřených souřadnic *x* a *y* na desce proměřovaného objektu získat jeho souřadnice *X* a *Y* a z nich pak již podle rovnice [1] a [2] jeho rovníkové souřadnice.

Určení parametrů dráhy ze souřadnic

Při určování orbitálních parametrů tělesa potřebujeme znát alespoň tři různé polohy v různých časech. Nikoho snad nemusím přesvědčovat o tom, že k jednoznačnému určení elipsy v prostoro je zapotřebí získat alespoň tři její body. Krom toho každá orbitální dráha je popsána šesticí orbitálních parametrů a my v každé poloze známe dvě souřadnice. Takže aby se počet parametrů vyrovnal, musíme mít alespoň tři měření.



Dráhové elementy jsou následující:

Ω - délka výstupného uzlu je oblouk mezi přímkou procházející Slunce a jarním bodem a tzv. uzlovou přímkou, tj. průsečnicí dráhy s rovinou ekliptiky. Výstupný uzel je místo, kde těleso vystupuje na sever, tedy "nad" rovninu ekliptiky.

***i* - sklon dráhy** - je úhel sevřený rovinou ekliptiky s rovinou dráhy. Pokud je i<90°, jde o pohyb přímý, jinak o pohyb zpětný.

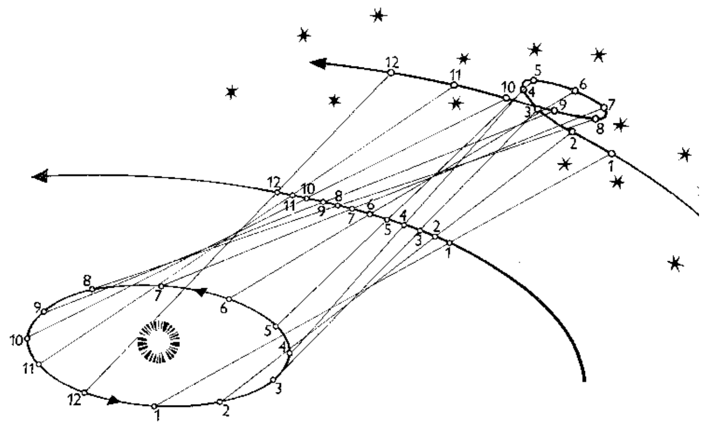
ω - argument perihélia je úhel mezi průsečnicí roviny ekliptiky a dráhy tělesa a poloosou dráhy, je měřený od směru výstupného uzlu k periheliu.

***a* - velká poloosa dráhy tělesa** (někdy se na tomto místě uvádí vzdálenost perihelia *q*, především u parabolických drah)

***e* - excentricita dráhy** - neboli výstřednost dráhy. Je to poměr mezi vzdáleností ohniska dráhy od jejího středu. a velkou poloosou. Pro kružnici je rovna 0, pro elipsu mezi 0 a 1, parabola má *e=1*, hyperbola *e>1*.

***T* - okamžik průchodu periheliem** uváděný většinou ve světovém čase.

Většina elementů je závislá na zvoleném souřadném systému, takže je ještě k nim doplnit údaj, ke které epoše se vztahují.



Pohyb těles po obloze je ale velmi komplikovaný. Už kvůli tomu, že se do jejich vlastního pohybu sčítá i pohyb Země, který může být v mnoha případech dokonce dominantní. Složitost pohybu po obloze přibližuje například přiložený obrázek. Výpočty dráhových elementů jsou však ještě komplikovanější.

V případě planet můžeme udělat aproximaci dráhy drahou kruhovou. V tom případě nám stačí znát dvě polohy dané planety na obloze, resp. dvě dvojice rovníkových souřadnic a k nim příslušné časy. Dále budeme potřebovat ještě znát pro daná pozorování geocentrické polohy Slunce (najdeme je například v hvězdářské ročence).

Následující řádky vám určitě nepřinesou žádné velké objasnění v odvozování vzorečků a v ujasnění pohledu na věc. Jde spíše o manuál, jak spočítat parametry kruhové dráhy "s tužkou, papírem a kalkulačkou".

Vstupní data, která potřebujeme pro výpočet znát, budou tedy:

α_i, δ_i, i=1,2 - dvě geocetrické polohy v rovníkových souřadnicích.

X_i, Y_i, Z_i - dvě geocentrické polohy Slunce

t_i - časy pozorování

Rovníkové souřadnice jsou souřadnice sférické. Převedeme si je pro výpočty do kartézské vztažné soustavy.

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}$$
$$\lambda_i = \cos\alpha_i \cos\delta_i$$
$$\mu_i = \sin\alpha_i \cos\delta_i$$
$$\nu_i = \sin\delta_i$$

Stanovíme pomocnou veličinu ψ_i z rovnice:

$$\cos\psi_i = -\frac{\lambda_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i}{R_i}$$

Spočítáme heliocentrické souřadnice planety metodou iterací.

Libovolně zvolíme hlavní poloosu a (z důvodu menšího počtu výpočtů je dobré se ji snažit co možná nejlépe odhadnout).

Spočítáme veličinu:

$$\rho_i = -R_i \cos\psi_i + \sqrt{a^2 - R_i^2 \sin^2\psi_i} \text{ , [7]}$$

a s její pomocí pak heliocentrické rovníkové souřadnice.

$$x_i = \rho_i \lambda_i - X_i$$
$$y_i = \rho_i \mu_i - Y_i$$
$$y_i = \rho_i \nu_i - Z_i$$

Vypočteme f z rovnice $\sin^2 f = \frac{1}{2} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{2a^2}$

a dosadíme do $f = \frac{1}{2} G a^{-\frac{3}{2}} (t_2 - t_1)$, kde $G=0{,}017202098$ je Gaussovská gravitační soustava.

Z této rovnice vypočteme a, které pak dosadíme do [7] a postup opakujeme tak dlouho, až se předchozí a vypočtená hodnota nebude lišit na nižším než čtvrtém desetinném místě.

Vezmene hodnotu ekliptikálních souřadnich z posledního výpočtu a vypočítáme již drahové elementy. Protože drahové elementy závisí na zvolené vztažné soustavě a bývá zvykem je udávat v ekliptikální souřadnice, převedemesi vypočtené heliocentrické souřadnice z rovníkových na ekliptikální.

$$x_e = x_r$$
$$y_e = z_r \sin o + y_r \cos o$$
$$z_e = z_r \cos o - y_r \sin o,$$

kde o je sklon ekliptiky k rovníku a můžeme pro řádové odhady počítat s hodnotou $o=23{,}5°$.

Zavedeme si předtím ještě pomocné veličiny.

$r_i = (x_i, y_i, z_i)$ - polohový vektor v ekliptikálních souřadnicích

$N = |r_1 \times r_2|$ - velikost normálového vektoru

Pak již spočítáme jednoznačné drahové elementy:

$$\sin i = \frac{\sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2}}{N}$$
$$\cos i = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{N}$$
$$\sin \Omega = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{N \sin i}$$
$$\cos \Omega = -\frac{z_1 x_2 - z_2 x_1}{N \sin i}$$

Oběžnou dobu určíme například z třetího Keplerova zákona:

$$\tau = \sqrt{a^3}\ ,$$

kde τ je doba oběhu v rocích a a je velká poloosa v AU.

V případě dráhy eliptické nebo jiné než kruhové je výpočet mnohem složitější, i když se v praxi opět používají některé aproximace.

Realita je ovšem trochu jiná - drahové elementy za nás počítá software, který již před námi někdo naprogramoval a který drahové elementy počítá s velmi dobrou přesností.

V dnešní době samozřejmě není nutno zjišťovat drahové elementy planet nebo jasnějších planetek, na kterých to budeme dělat my, ale na nových objevených planetkách nebo kometách.